SLAM 問題の定式化

にゃーん

2019 年 11 月 4 日

1 SLAM 問題の分類

SLAM$\tilde{}$(スラム) は Simultaneous Localization And Mapping の略称であり、自己位置推定と地図構築を同時に行う問題である。移動ロボットが、周囲の環境の地図を持たず、また自己の姿勢も分からないという状況にあるとき、環境の地図を構築しながら、その地図上での自己位置を推定しなければならない。しかし、ロボットが計測データを使って地図を生成するためには、ロボットの自己位置が必要であり、またロボットの自己位置を推定するためには地図が必要である。即ち、自己位置推定と地図構築は相互依存の関係にあるため、SLAM の問題を解くのは一層困難になる。

1.1 オンライン SLAM 問題

SLAM 問題は、**オンライン SLAM 問題** (Online SLAM) と**完全 SLAM 問題** (Full SLAM) の 2 種類に分けられる [1][2]。オンライン SLAM 問題では、時刻 t における姿勢 x_t 地図 m の事後確率 $p(x_t, m|z_{1:t}, u_{1:t})$ を求める。オンライン SLAM はその名の通り、各時刻において事後確率を求める、逐次的なアルゴリズムである。以下の漸化式を利用すれば、時刻 t における事後確率 $p(x_t, m|z_{1:t}, u_{1:t})$ を、時刻 $t-1$ における事後確率 $p(x_{t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t-1})$ から求められる。ベイズフィルタの導出と同様にして、漸化式は次のように得られる。

$$
\begin{aligned}
& p(x_t, m|z_{1:t}, u_{1:t}) \\
&= \frac{p(z_t|x_t, m, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_t, m|z_{1:t-1}, u_{1:t})}{p(z_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})} \qquad (\because \text{ベイズの定理}) && (1) \\
&= \eta \ p(z_t|x_t, m, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_t, m|z_{1:t-1}, u_{1:t}) && (2) \\
&= \eta \ p(z_t|x_t, m) p(x_t, m|z_{1:t-1}, u_{1:t}) && (3)
\end{aligned}
$$

ここで $\eta = p(z_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})$ は、現在の状態 x_t と地図 m には依存しないため、定数項として扱っている。最後の式変形では、現在の計測 z_t は、現在の姿勢 x_t と地図 m によって決まり、それ以外の変数 $(z_{1:t-1}, u_{1:t})$ とは独立であることを利用している。右側の項 $p(x_t, m|z_{1:t-1}, u_{1:t})$ は次のように、変数 x_{t-1} に関する周辺化として記述される。

$$
\begin{aligned}
& p(x_t, m|z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\
&= \int p(x_t, x_{t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1} && (4) \\
&= \int p(x_t|x_{t-1}, m, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_{t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1} && (5) \\
&= \int p(x_t|x_{t-1}, u_t) p(x_{t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) dx_{t-1} && (6)
\end{aligned}
$$

最後の式変形では、マルコフ性の仮定から、現在の状態 x_t は、直前の状態 x_{t-1} と制御 u_t のみに依存し、従ってそれ以外の変数 $(m, z_{1:t-1}, u_{1:t})$ とは独立であることを利用している。また時刻 $t-1$ における状態 x_{t-1} は、未来の時刻 t における制御 u_t とは関係ないことも利用している。地図 m が現在の状態 x_t の推定に何らかの有益な情報をもたらす場合、x_t は m とは独立にはならず、$p(x_t|x_{t-1}, u_t) \neq p(x_t|x_{t-1}, u_t, m)$ となる。しかし、ここでは x_t が m とは独立と仮定している。このとき漸化式は以下のようになる。

$$
p(x_t, m|z_{1:t}, u_{1:t}) = \eta \ p(z_t|x_t, m) \int p(x_t|x_{t-1}, u_t) p(x_{t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) dx_{t-1} \qquad (7)
$$

漸化式には、状態遷移確率 $p(x_t|x_{t-1}, u_t)$ と計測確率 $p(z_t|x_t, m)$ の双方が含まれている。最初に制御 u_t を用いて、直前の事後確率 $p(x_{t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t-1})$ と状態遷移確率 $p(x_t|x_{t-1}, u_t)$ の積を周辺化し、現在の状態 x_t に関する予測を確率分布 $p(x_t, m|z_{1:t-1}, u_{1:t})$ として得る。次に計測 z_t を用いて、確率分布 $p(x_t, m|z_{1:t-1}, u_{1:t})$ と計測確率 $p(z_t|x_t, m)$ との積を求め、時刻 t における事後確率 $p(x_t, m|z_{1:t}, u_{1:t})$ を得る。即ち事後確率の更新は、予測と修正の 2 ステップに分けられる。制御 u_t を使って状態 x_t に関する予測を立てた後、計測 z_t を使って予測を修正し、かつ現在の地図 m に対する推定を行う。これよりオンライン SLAM 問題は、拡張カルマンフィルタやパーティクルフィルタのような、ベイズフィルタの枠組みで計算できる。

オンライン SLAM 問題は、図 1 に示すような確率モデルとして表現される。図 1 では、現在の状態 x_t は直前の状態 x_{t-1} と制御 u_t にのみ依存することと、計測 z_t は現在の状態 x_t と地図 m にのみ依存することの両方が表現される。状態遷移確率 $p(x_t|x_{t-1}, u_t)$ と計測確率 $p(z_t|x_t)$ の形から、変数間の依存関係は明らかである。またオンライン SLAM 問題において推定したい変数は、図 1 では濃い灰色で囲われている。

1.2 完全 SLAM 問題

完全 SLAM 問題では、時刻 t における姿勢 x_t ではなく、全時刻における軌跡 $x_{1:t}$ に対して、事後確率が計算される。事後確率は $p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t})$ のように表され、オンライン SLAM における事後確率 $p(x_t, m|z_{1:t}, u_{1:t})$ との関係は、以下のように周辺化として記述される。

$$p(x_t, m|z_{1:t}, u_{1:t}) = \int\int\cdots\int p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t}) dx_1 dx_2 \cdots dx_{t-1} \tag{8}$$

完全 SLAM 問題は、Rao-Blackwellized パーティクルフィルタ (FastSLAM) や GraphSLAM を用いて解くことができる。前者は完全 SLAM 問題をオンラインで、後者はオフラインで解くアルゴリズムである。また前者はベイズフィルタ、後者は非線形最適化ベースの手法である。完全 SLAM 問題は、図 2 に示すような確率モデルとして表現される。変数間のグラフ構造は先程の図 1 と同一のものである。完全 SLAM において推定したいのは、ロボットの完全な軌跡 $x_{1:t}$ と地図 m であり、それらの変数が濃い灰色で囲われている。

完全 SLAM 問題についても次のような漸化式が得られ、時刻 $t-1$ における事後確率 $p(x_{1:t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t-1})$ から、時刻 t における事後確率 $p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t})$ が求まる。導出はオンライン SLAM 問題のときと殆ど同様である。

$$\begin{aligned}
& p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t}) \\
&= \frac{p(z_t|x_{1:t}, m, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_{1:t}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t})}{p(z_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})} \\
&= \eta\ p(z_t|x_{1:t}, m, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_{1:t}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\
&= \eta\ p(z_t|x_t, m) p(x_{1:t}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\
&= \eta\ p(z_t|x_t, m) p(x_t|x_{1:t-1}, m, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_{1:t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\
&= \eta\ p(z_t|x_t, m) p(x_t|x_{t-1}, u_t) p(x_{1:t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t-1})
\end{aligned} \tag{9}$$

$\eta = p(z_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})$ は、ロボットの軌跡 $x_{1:t}$ と地図 m の双方に依存しないため定数項として扱う。また現在の計測 z_t は、現在の姿勢 x_t と地図のみによって決まることから、$p(z_t|x_{1:t}, m, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(z_t|x_t, m)$ が成立する。更に現在の姿勢 x_t は、直前の状態 x_{t-1} と制御 u_t のみに依存することから、$p(x_t|x_{1:t-1}, m, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_t|x_{t-1}, u_t)$ である。最後の式の最右項は $x_{1:t-1}$ と m に関する確率分布であり、未来の時刻 t における制御 u_t とは独立であるため、$p(x_{1:t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_{1:t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t-1})$ がいえる。オンライン SLAM 問題のときとは異なり、周辺化のための積分が出現しないことに注目する。漸化式を次々に展開していくと次のようになる。

$$\begin{aligned}
& p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t}) \\
&= \eta\ p(z_t|x_t, m) p(x_t|x_{t-1}, u_t) p(x_{1:t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) \\
&= \eta\ p(z_t|x_t, m) p(x_t|x_{t-1}, u_t) p(z_{t-1}|x_{t-1}, m) p(x_{t-1}|x_{t-2}, u_{t-1}) p(x_{1:t-2}, m|z_{1:t-2}, u_{1:t-2}) \\
& \cdots \\
&= \eta\ p(x_0, m) \prod_{t=1}^{t} p(z_t|x_t, m) p(x_t|x_{t-1}, u_t)
\end{aligned} \tag{10}$$

上式から、完全 SLAM 問題を解くために本質的に必要なのは、状態遷移確率 $p(x_t|x_{t-1},u_t)$、計測確率 $p(z_t|x_t,m)$、そして初期状態に関する確率 $p(x_0,m)$ の 3 つだと分かる。

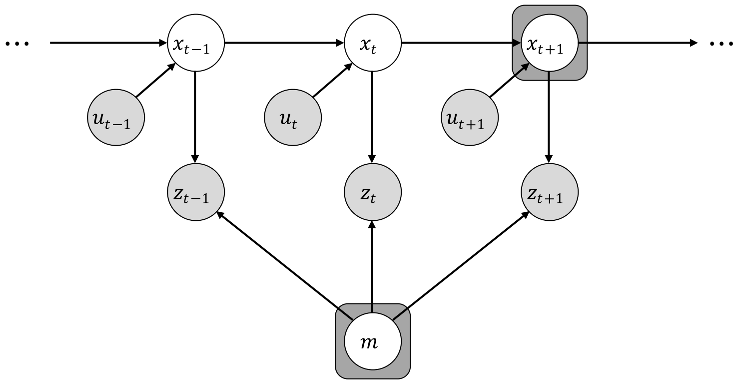

図 1　オンライン SLAM 問題の確率モデル

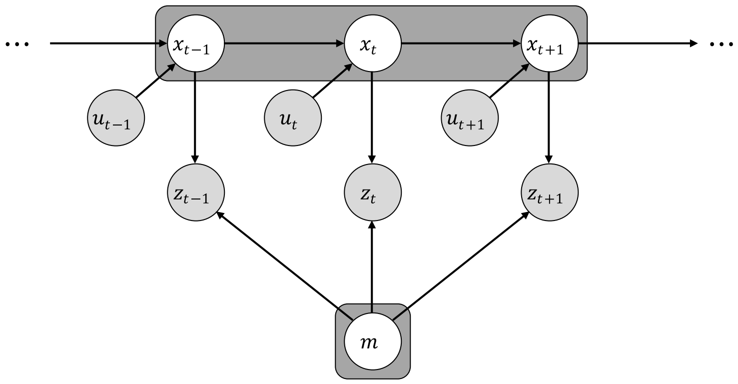

図 2　完全 SLAM 問題の確率モデル

1.3　地図と計測の対応付け

上記では地図 m の具体的な表現については言及されなかった。ここでは例として、ロボットにレーザスキャナ (レーザレンジファインダ) を装着する場合を考える。このとき計測 z_t はスキャンデータとよばれ、点群、即ち物体上の点までの距離 r と方向 θ の集合として記述される。地図として点群 (**特徴ベース**の地図) を用いるとき、スキャンデータ z_t に含まれる各点が、地図上のどの点と対応するのか判定する必要がある。このようなスキャンデータと地図との対応関係を、変数 c_t として明示的に導入するのは有効である。また占有格子地図 (**位置ベース**の地図) を用いるときも、スキャンデータ z_t を構成する各点と、地図上の格子との対応関係を考えることはできる。地図 m と計測 z_t との対応付け変数 c_t を用いると、オンライン SLAM 問題における事後確率は以下のようになる。

$$p(x_t, m, c_t|z_{1:t}, u_{1:t}) \tag{11}$$

また完全 SLAM 問題の事後確率は次のように表される [1][3][4]。

$$p(x_{1:t}, m, c_{1:t}|z_{1:t}, u_{1:t}) \tag{12}$$

オンライン SLAM 問題での事後確率 $p(x_t, m, c_t|z_{1:t}, u_{1:t})$ は、完全 SLAM 問題での事後確率の周辺化として記述される。

$$p(x_t, m, c_t|z_{1:t}, u_{1:t}) = \int\int\cdots\int\sum_{c_1}\sum_{c_2}\cdots\sum_{c_{t-1}} p(x_{1:t}, m, c_{1:t}|z_{1:t}, u_{1:t})dx_1 dx_2\cdots dx_{t-1} \tag{13}$$

対応付け変数 c_t が既知であれば、オンライン SLAM 問題と完全 SLAM 問題における事後確率は、それぞれ次のようになる。先程とは異なり、計測確率の条件変数に c_t が加わって $p(z_t|x_t, m, c_t)$ となる。

$$p(x_t, m|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) = \eta\ p(z_t|x_t, m, c_t)\int p(x_t|x_{t-1}, u_t)p(x_{t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1})dx_{t-1} \tag{14}$$

$$p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) = \eta\ p(z_t|x_t, m, c_t)p(x_t|x_{t-1}, u_t)p(x_{1:t-1}, m|z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1}) \tag{15}$$

$$= \eta\ p(x_0, m) \prod_{t=1}^{t} p(z_t|x_t, m, c_t)p(x_t|x_{t-1}, u_t) \tag{16}$$

計測 z_t には一般に複数個のデータが含まれるが、ここでは各データ z_t^i については互いに独立と仮定する。このとき計測確率は次のように、各データ z_t^i に関する項の積として記述できる。各データ z_t^i に割り振られる対応付け変数は c_t^i と表す。

$$p(z_t|x_t, m, c_t) = \prod_i p(z_t^i|x_t, m, c_t^i) \tag{17}$$

このとき完全 SLAM 問題は以下のように記述される。

$$p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) = \eta\ p(x_0, m) \prod_{t=1}^{t} p(x_t|x_{t-1}, u_t) \prod_i p(z_t^i|x_t, m, c_t^i) \tag{18}$$

1.4　完全 SLAM 問題の分解

完全 SLAM 問題の事後確率は $p(x_{1:t}, m, c_{1:t}|z_{1:t}, u_{1:t})$ であった。対応付け変数 $c_{1:t}$ が既知、即ち計測 $z_{1:t}$ と地図 m との対応関係が完全に分かっているとき、完全 SLAM 問題は次の事後確率の推定となる。

$$p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) \tag{19}$$

地図 m の構成要素を $\{m_1, m_2, \ldots, m_N\}$ と記述すると、上記の事後確率は次のように $N+1$ 個の項に分解できる。各構成要素 m_n は、点群地図 (位置ベースの地図) であれば個々の点、占有格子地図 (特徴ベースの地図) であれば単一の格子を意味する。軌跡 $x_{1:t}$ が既知であれば、地図の各構成要素 m_n は互いに独立になるため、地図 m の推定は N 個の各要素 m_n の推定問題に分解できる。即ち完全 SLAM 問題は、対応関係 $c_{1:t}$ が既知であれば、軌跡 $x_{1:t}$ の推定と、地図の各構成要素 m_n の推定という $N+1$ 個の問題に分割される。これより、最初に軌跡 $x_{1:t}$ のみを推定し、その軌跡を用いて地図の各要素 m_n を個別に推定するという 2 段階の処理にできる。全時刻における状態 $x_{1:t}$ と地図 m を一度に推定しようとすると、途方もない計算が必要となる。地図 m は大規模になる可能性があり、このとき解くべき問題は非常に高次元になる。高次元な空間に広がる確率分布 $p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t})$ から、最大値を取るような解を探索するのは手間が掛かる。以下のように確率分布を $N+1$ 個の項に分割すれば、各項を最大化する問題に置き換えられ、$x_{1:t}$ 及び m_n の推定という低次元の問題に分割されるため、計算量を大幅に削減できる。

$$p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) = p(x_{1:t}|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) \prod_{n=1}^{N} p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) \tag{20}$$

上式の確率モデルは図 3 のように表現される。図 3 は、各時刻において計測データが一つであり、地図中のどれか一つの要素を観測する場合である。対応付け変数 $c_t = j$ が既知であることから、時刻 t における計測 z_t は、地図中の単一要素 m_j に対するものだと分かる。時刻 $t+1$ と $t+2$ では、対応付け変数 c_{t+1} と c_{t+2} がいずれも k を指し示しており、従って同一の要素 m_k が観測されている。ある時刻において複数の計測データが含まれ、地図中の複数の要素が同時に観測される場合は (複数の計測データが地図中の同一の要素を指すこともあり得る)、それと同じ個数分だけ対応付けの変数を用意すればよい。例えば各時刻において 10 個の計測データが得られるとき、その一つ一つが地図中のどの要素に対応するのかを示すために、各データについて 10 個の対応付け変数を導入すればよい。先程と同様に、計測データ $z_t = \left\{z_t^i\right\}$ について、各データ z_t^i に割り振られた対応付け変数を c_t^i と表す。

図 3 に描かれた地図の各要素 $m_i,\ m_j,\ m_k$ をみると、いずれも状態変数 $x_{t-1},\ x_t,\ x_{t+1},\ x_{t+2}$ を通じて間接的に接続されている。状態変数 $x_{t-1},\ x_t,\ x_{t+1},\ x_{t+2}$ を通過することなく、地図中の 2 つの要素を結ぶようなパスは存在しないことから、全時刻における状態 (軌跡) が既知であれば、地図中の各要素 $m_i,\ m_j,\ m_k$ は互いに独立になることが分かる。例えば、m_j の推定には軌跡 $x_{1:t}$、制御 $u_{1:t}$、計測 $z_{1:t}$、そして対応付け変数 $c_{1:t}$ があれば十分であり、地図中の別の要素 m_i は必要ではないため、要素 m_i が正確に推定されても、m_j の推定には何ら影響を与えない。

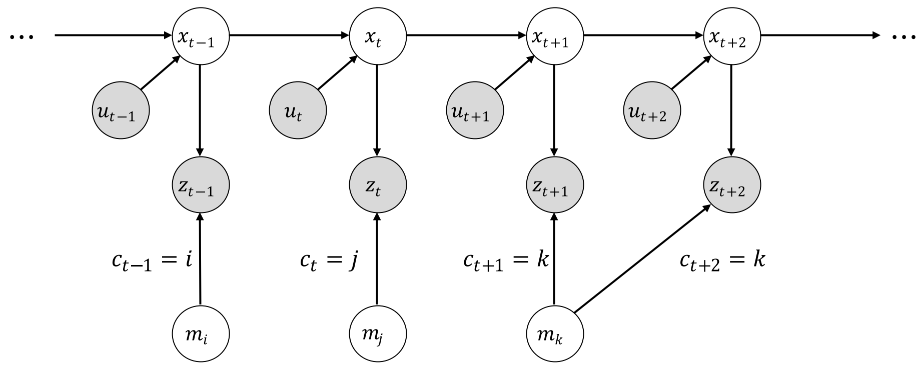

図 3　完全 SLAM 問題の分解

事後確率の分解を導出するために、まずは事後確率 $p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t})$ を次のように分解する。この証明は文献 [1] の 13.2 節を基にしている。

$$p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) = p(x_{1:t}|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t})p(m|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) \tag{21}$$

第 2 項が、各要素 m_n についての分布 $p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t})$ の積として記述できることを、数学的帰納法によって示す。

$$p(m|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) = \prod_{n=1}^{N} p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) \tag{22}$$

時刻 $t = 0$ のときは明らかに成立する。ロボットはまだ制御や計測を受け取っておらず、地図に関する知識を一切持たないため、地図の各要素 m_n は互いに独立だからである。

$$p(m) = \prod_{n=1}^{N} p(m_n) \tag{23}$$

時刻 $t-1$ において上記の分解が成り立っているとき、時刻 t についても成り立つことを示す。

$$p(m|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1}) = \prod_{n=1}^{N} p(m_n|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1}) \tag{24}$$

地図の各要素 m_n について、時刻 t で観測されたかどうかで場合分けを行う。観測されていれば、時刻 t で得られた計測データ z_t の中には地図 m_n に対応するものがあり (z_t^n とする)、対応付け変数 c_t には n が含まれている (c_t^n とする)。時刻 t で観測された要素の集合を $\mathcal{X}_t \subseteq \{1, \cdots, N\}$ とすると、$\mathcal{X}_t$ の各要素 $n \in \mathcal{X}_t$ について以下のようにできる。分母の第 2 項 $p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})$ の変形では、時刻 $t-1$ までの観測 $z_{1:t-1}$ が条件となっており、従って時刻 t におけるロボットの状態 x_t や制御 u_t、対応付け変数 c_t について独立となることを利用している。図 3 をみれば分かるように、時刻 t で観測された地図の要素 m_n は、時刻 t における計測データ z_t と対応変数 c_t を通じて状態 x_t と関係しているため、時刻 $t-1$ までの計測データ $z_{1:t-1}$ の条件下では、m_n は対応変数 c_t や状態 x_t とは無関係になる。

$$\begin{aligned} p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) &= \frac{p(z_t^n|m_n, x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})}{p(z_t^n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})} && (25) \\ &= \frac{p(z_t^n|m_n, x_t, c_t^n)p(m_n|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1})}{p(z_t^n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})} && (26) \end{aligned}$$

これより 1 時刻前までのデータによる m_n の事後確率について、次の式が得られる。

$$p(m_n|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1}) = \frac{p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t})p(z_t^n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})}{p(z_t^n|m_n, x_t, c_t^n)} \tag{27}$$

地図の要素 m_n が、時刻 t で観測されていない場合を考える ($m_n \notin \mathcal{X}_t$)。このとき m_n の事後確率は、1 時刻前までのデータによって決まり、時刻 t におけるロボットの状態 x_t や制御 u_t、対応付け変数 c_t や計測 z_t とは無関係になる。従って単に以下の式が成り立つ。

$$p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) = p(m_n|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1}) \tag{28}$$

上式の左辺と右辺を入れ替えれば以下のようになる。

$$p(m_n|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1}) = p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) \tag{29}$$

以上より $p(m_n|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1})$ は、m_n が時刻 t で観測されたかどうかによって、次のように場合分けできる。

$$p(m_n|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1}) = \begin{cases} \dfrac{p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t})p(z_t^n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})}{p(z_t^n|m_n, x_t, c_t^n)} & (x \in \mathcal{X}_t) \\ p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) & (x \notin \mathcal{X}_t) \end{cases} \tag{30}$$

これより、時刻 t においても分解が成り立つことを示せる。

$$\begin{aligned} &p(m|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) \\ &= \frac{p(z_t|m, x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})p(m|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})}{p(z_t|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})} \qquad (\because \text{ベイズの定理}) \\ &= \frac{p(z_t|m, x_t, c_t)p(m|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1})}{p(z_t|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})} \\ &= \frac{p(z_t|m, x_t, c_t)}{p(z_t|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})}p(m|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1}) \end{aligned} \tag{31}$$

上式の第 1 項は、時刻 t で観測された、地図の各要素 $n \in \mathcal{X}_t$ に関する項に分解できる。計測データに含まれる各計測については、互いに独立と仮定した。計測 z_t に含まれる、各要素 $n \in \mathcal{X}_t$ に対応するものは z_t^n、そして対応付け変数は便宜的に c_t^n で表す。n は地図の各要素を指すインデックスであって、何番目の計測データかを表すインデックスではない。c_t^n は明らかに n を指している (前節での z_t^i と c_t^i の定義とは若干異なることに注意)。

$$p(z_t|m, x_t, c_t) = \prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|m_n, x_t, c_t^n) \tag{32}$$

$$p(z_t^n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t}) = \prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t}) \tag{33}$$

これを元の式に代入すれば次を得る。

$$\begin{aligned} &p(m|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) \\ &= \frac{\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|m_n, x_t, c_t^n)}{\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})} p(m|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1}) \\ &= \frac{\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|m_n, x_t, c_t^n)}{\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})} \prod_{n=1}^{N} p(m_n|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1}) \qquad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= \frac{\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|m_n, x_t, c_t^n)}{\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})} \\ &\qquad \left[\prod_{n \notin \mathcal{X}_t} p(m_n|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1})\right] \left[\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(m_n|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1})\right] \end{aligned}$$

上記の $p(m_n|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, c_{1:t-1})$ に、場合分けにより求めた式を代入すれば次を得る。

$$\begin{aligned} &\frac{\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|m_n, x_t, c_t^n)}{\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})} \left[\prod_{n \notin \mathcal{X}_t} p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t})\right] \\ &\qquad \left[\prod_{n \in \mathcal{X}_t} \frac{p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t})p(z_t^n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})}{p(z_t^n|m_n, x_t, c_t^n)}\right] \\ &= \frac{\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|m_n, x_t, c_t^n)}{\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})} \left[\prod_{n \notin \mathcal{X}_t} p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t})\right] \\ &\qquad \frac{\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|x_{1:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}, c_{1:t})}{\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(z_t^n|m_n, x_t, c_t^n)} \left[\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t})\right] \end{aligned}$$

分母と分子が互いに打ち消し合うので、次のような単純な式になる。

$$\begin{aligned}&\left[\prod_{n \notin \mathcal{X}_t} p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t})\right]\left[\prod_{n \in \mathcal{X}_t} p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t})\right] \\ &= \prod_{n=1}^{N} p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) \end{aligned} \tag{34}$$

従って、対応関係 $c_{1:t}$ が既知であるときの、完全 SLAM 問題の事後確率 $p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t})$ は以下のように分解される [1][3]。

$$\begin{aligned} p(x_{1:t}, m|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) &= p(x_{1:t}|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) p(m|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) \\ &= p(x_{1:t}|z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) \prod_{n=1}^{N} p(m_n|x_{1:t}, z_{1:t}, u_{1:t}, c_{1:t}) \end{aligned} \tag{35}$$

1.5 SLAM 問題の難しさ

SLAM では、連続空間における姿勢 x_t や地図 m の推定 (非線形最適化やフィルタ処理) だけでなく、離散的な対応付け変数 c_t の推定、言い換えるとスキャンデータと地図の対応付け問題 (組み合わせ最適化問題) を解く必要がある。このように SLAM には連続的な問題と離散的な問題の双方が含まれている。連続的なパラメータ x_t, m、離散的なパラメータ c_t の個数は、普通どちらも大きくなる。非線形最適化により x_t, m を求める場合、次元数が大きくなると局所解に陥りやすくなる。また取り得る全ての対応付け $c_{1:t}$ の場合の数は、時刻 t が大きくなるに従って指数的に増加する。これより解の候補は莫大になり、事後分布を厳密に求めることは不可能となる [1][3][4]。

参考文献

[1] Sebastian Thrun, Wolfram Burgard, and Dieter Fox. 確率ロボティクス プレミアムブックス版. 株式会社マイナビ出版, 2016. 上田 隆一 訳.

[2] 原 祥尭, 坪内 孝司, and 大島 章. 確率的に蓄積したスキャン形状により過去を考慮した Rao-Blackwellized Particle Filter SLAM. 日本機械学会論文集, 82(834):15–00421, February 2016.

[3] 友納 正裕. 移動ロボットの環境認識 —地図構築と自己位置推定. システム制御情報学会誌, 60(12):509–514, 2016.

[4] 友納 正裕. *SLAM* 入門 —ロボットの自己位置推定と地図構築の技術—. オーム社, 2018.