スキャンマッチング (ガウス・ニュートン法)

ほげ

2021 年 8 月 12 日

1　スキャンマッチング (ガウス・ニュートン法)

1.1　概要

Hector SLAM の論文 [1] で示されている, ガウス・ニュートン法を利用したスキャンマッチング手法について説明する．LiDAR で取得された 2D 点群 (スキャン点群) を, 占有格子地図に重ね合わせるので, この手法は Scan-to-map マッチングとよばれる．図 1 におけるマス目は占有格子地図, 青い各点は点群を表している．

占有格子地図 (Occupancy grid map) とは, ロボットが取り巻く環境を格子状に区切って, 障害物が存在する確率 (占有確率; Occupancy probability) を各格子に割り当てたものである．占有確率が高ければ, 壁や家具など何らかの障害物があって, ロボットが通れない可能性が高いことを示している．占有格子地図は, 通れる場所と通れない場所をロボットが判断し, 経路計画を立てるための貴重な情報となる．LiDAR は, 周囲の障害物までの距離と方向を取得するセンサである．センサから周囲の環境に向けてレーザを照射し, 障害物に当たって跳ね返ってくるまでの時間 (Time of flight) を計測することで, 距離を得る．1 回の走査によって得られた距離と方向のデータをまとめてスキャンとよび, センサの周囲にある障害物の形状を点群として表現する．

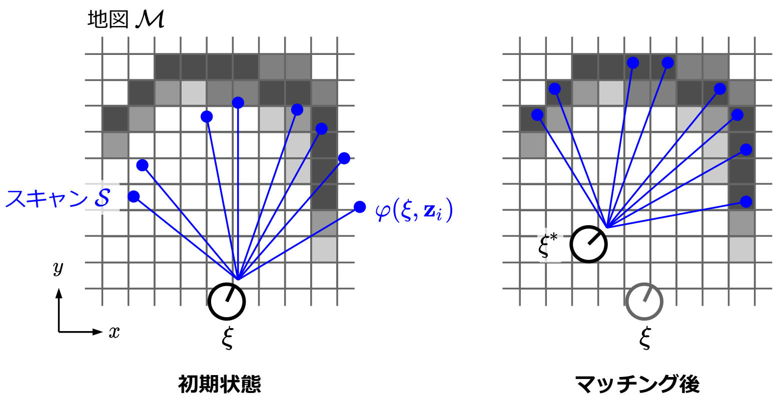

図 1　Scan-to-map マッチング

Scan-to-map マッチングでは, スキャン点群が占有格子地図と重なり合うように, 地図に対するスキャン点群の相対的な姿勢を計算する．スキャンを構成する各点は障害物を表しているので, 各点に対応する地図の格子は, 高い占有確率を持つべきである．相対姿勢を使って, スキャン点群をセンサ座標系から地図座標系へと変

換したときに, 各点に対応する格子が 1 に近い占有確率を持っていれば, スキャン点群と地図は重なり合っていると判断できる. 従って Scan-to-map マッチングでは, スキャン点に対応する格子の占有確率を最大化することが目標となる.

1.2 問題の定義

占有格子地図に対するスキャンの相対姿勢を $\boldsymbol{\xi} = [\xi_x, \xi_y, \xi_\theta]^\top \in \mathrm{SE}(2)$ とする. $\xi_x, \xi_y \in \mathbb{R}$ は姿勢の並進成分, $\xi_\theta \in [-\pi, \pi)$ は姿勢の回転成分である. スキャン $\mathcal{S} = \{[s_{1,x}, s_{1,y}]^\top, \ldots, [s_{N,x}, s_{N,y}]^\top\}$ は N 個の点から構成され, 各点はセンサ座標系で $\boldsymbol{z}_i = [s_{i,x}, s_{i,y}]^\top \in \mathbb{R}^2$ と表される. 地図 $\mathcal{M}$ において, インデックス $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ に対応する格子の占有確率を $\mathcal{M}(i, j) \in [0, 1]$ とし, 各格子の一辺の長さを r とする (解像度とよばれる). 格子のサイズ r を小さくとれば, その分環境を細かく区切ることになるので, 環境の形状をより精密に表現できるが, 必要な格子の数 (メモリコスト) は増加する. 地図座標系での点 $\boldsymbol{p} = [p_x, p_y]^\top \in \mathbb{R}^2$ に対応する占有確率は, 点の座標と対応する格子のインデックス $(i, j) = (\lfloor p_x/r \rfloor, \lfloor p_y/r \rfloor)$ から $\mathcal{M}(\lfloor p_x/r \rfloor, \lfloor p_y/r \rfloor)$ として得られるが, 簡単のために $\mathcal{M}(\boldsymbol{p})$ と書く. $\lfloor x \rfloor$ は, x 以下の最大の整数を求めるための床関数である. センサ座標系でのスキャン点 $\boldsymbol{z}_i = [s_{i,x}, s_{i,y}]^\top$ は, 次のように相対姿勢 $\boldsymbol{\xi}$ を使って, 地図座標系 $\varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i)$ に変換できる.

$$\varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i) = \begin{bmatrix} \cos \xi_\theta & -\sin \xi_\theta \\ \sin \xi_\theta & \cos \xi_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{i,x} \\ s_{i,y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{bmatrix} \tag{1}$$

(1) 式はセンサ座標系から地図座標系への変換を表し, スキャン点 $\boldsymbol{z}_i = [s_{i,x}, s_{i,y}]^\top$ を ξ_θ だけ回転させた後, $[\xi_x, \xi_y]^\top$ だけ平行移動している. Scan-to-map マッチングでは, 各スキャン点 $\boldsymbol{z}_i$ に対応する格子の占有確率 $\mathcal{M}(\varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i))$ を, 相対姿勢 $\boldsymbol{\xi}$ について最大化しようとする. 各スキャン点 $\boldsymbol{z}_i$ に対応する地図上の座標 $\varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i)$ は当然, スキャンと地図との相対姿勢 $\boldsymbol{\xi}$ に応じて変化する. この問題は, (2) 式で定義される損失関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\xi}; \mathcal{M}, \mathcal{S})$ の, 相対姿勢 $\boldsymbol{\xi}$ に関する最小化として捉えられる.

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\xi}; \mathcal{M}, \mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \mathcal{M}(\varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i))\right)^2 \tag{2}$$

(2) 式の最小化によって, スキャン点 $\boldsymbol{z}_i$ に対応する占有確率 $\mathcal{M}(\varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i))$ が 1 に近づく, 即ちスキャン点が地図上で障害物を指し示すようになるので, 図 1 右側のようにスキャン $\mathcal{S}$ と地図 $\mathcal{M}$ が重なり合う. (2) 式は, 残差 $1 - \mathcal{M}(\varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i))$ の二乗和になっているので, ガウス・ニュートン法やレーベンバーグ・マーカート法を利用して, $\boldsymbol{\xi}$ に関して逐次的に最小化できる.

1.3 ガウス・ニュートン法の適用

(2) 式をガウス・ニュートン法により最小化するために, 相対姿勢 $\boldsymbol{\xi}$ の初期値 $\breve{\boldsymbol{\xi}}$ を考え, 初期値 $\breve{\boldsymbol{\xi}}$ からの変位 $\boldsymbol{\Delta\xi} = \boldsymbol{\xi} - \breve{\boldsymbol{\xi}}$ を使って (2) 式を書き換える ($\boldsymbol{\xi} = \breve{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\Delta\xi}$).

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\Delta\xi}; \breve{\boldsymbol{\xi}}, \mathcal{M}, \mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\Delta\xi}, \boldsymbol{z}_i))\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\Delta\xi})^2 \tag{3}$$

(3) 式は, 変位 $\boldsymbol{\Delta\xi}$ についての関数となっているほか, 残差を $e_i(\boldsymbol{\xi}) = e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\Delta\xi}) = 1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\Delta\xi}, \boldsymbol{z}_i))$ とおいた. 残差 $e_i(\boldsymbol{\xi})$ を $\breve{\boldsymbol{\xi}}$ のまわりで, 1 次の項までテイラー展開すれば

$$e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\Delta\xi}) \simeq e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}}) + \nabla e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}})^\top \boldsymbol{\Delta\xi}, \quad \nabla e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}}) = \left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} e_i(\boldsymbol{\xi}) \right|_{\boldsymbol{\xi} = \breve{\boldsymbol{\xi}}} \in \mathbb{R}^3 \tag{4}$$

$e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\Delta\xi}) = 1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\Delta\xi}, \boldsymbol{z}_i))$ を (4) 式に代入すれば

$$
\begin{aligned}
e_i(\boldsymbol{\xi}) &= 1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} (1 - \mathcal{M}(\varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i))) \Big|_{\boldsymbol{\xi} = \breve{\boldsymbol{\xi}}} \right)^\top \boldsymbol{\Delta\xi} \\
&= 1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) - \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathcal{M}(\varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i)) \Big|_{\boldsymbol{\xi} = \breve{\boldsymbol{\xi}}} \right)^\top \boldsymbol{\Delta\xi} \\
&= 1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) - \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \mathcal{M}(\boldsymbol{p}) \Big|_{\boldsymbol{p} = \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)} \right)^\top \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i) \Big|_{\boldsymbol{\xi} = \breve{\boldsymbol{\xi}}} \right) \boldsymbol{\Delta\xi} \\
&= 1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) - \nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \boldsymbol{\Delta\xi} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

を得る．但し

$$
\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \mathcal{M}(\boldsymbol{p}) \Big|_{\boldsymbol{p} = \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)} \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i) \Big|_{\boldsymbol{\xi} = \breve{\boldsymbol{\xi}}} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \qquad (6)
$$

とおいた．(5) 式の変形では，合成関数の微分に関する (22) 式を使用している (1.4 節を参照)．(5) 式を (3) 式の損失関数に代入すれば

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\boldsymbol{\Delta\xi}; \breve{\boldsymbol{\xi}}, \mathcal{M}, \mathcal{S}) &= \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) - \nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \boldsymbol{\Delta\xi} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) \right)^2 - 2 \left(1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) \right) \nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \boldsymbol{\Delta\xi} + \\
&\qquad \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \boldsymbol{\Delta\xi} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) \right)^2 - 2 \left(1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) \right) \nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \boldsymbol{\Delta\xi} + \\
&\qquad \boldsymbol{\Delta\xi}^\top \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right)^\top \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right) \boldsymbol{\Delta\xi} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

を得る．(7) 式を $\boldsymbol{\Delta\xi}$ で微分すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\boldsymbol{\Delta\xi}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\Delta\xi}; \breve{\boldsymbol{\xi}}, \mathcal{M}, \mathcal{S}) &= \sum_{i=1}^{N} (-2) \left(1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) \right) \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right)^\top + \\
&\qquad 2 \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right)^\top \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right) \boldsymbol{\Delta\xi} \\
&= -2 \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) - \nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \boldsymbol{\Delta\xi} \right) \\
&\qquad \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right)^\top \qquad (8)
\end{aligned}
$$

を得る．(3) 式あるいは (7) 式を最小化する $\boldsymbol{\Delta\xi}$ は，(8) 式を $\boldsymbol{0}$ とおき，$\boldsymbol{\Delta\xi}$ について解けば得られるから

$$
-2 \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) - \nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \boldsymbol{\Delta\xi} \right) \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right)^\top = \boldsymbol{0}
$$

これを変形すれば

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right)^\top \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right) \boldsymbol{\Delta\xi} = \\
&\quad \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) \right) \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right)^\top \\
\Rightarrow \boldsymbol{\Delta\xi} &= \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right)^\top \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right) \right)^{-1} \\
&\quad \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) \right) \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right)^\top
\end{aligned}
$$

次のように行列 $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ とベクトル $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^3$ を定めれば

$$
\boldsymbol{H} = \sum_{i=1}^{N} \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right)^\top \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right) \tag{9}
$$

$$
\boldsymbol{g} = \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)) \right) \left(\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i) \right)^\top \tag{10}
$$

最適な $\boldsymbol{\Delta\xi}$ は結局次のようになる．

$$
\boldsymbol{\Delta\xi} = \boldsymbol{H}^{-1} \boldsymbol{g} \tag{11}
$$

(11) 式には, (6) 式で定義した微分 $\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))$ と $\nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)$ が登場するが, これらの計算方法を考えてみる．$\nabla \varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)$ については, センサ座標系から地図座標系への変換 φ が (1) 式で表現されるので

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i) &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \begin{bmatrix} \varphi_x(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i) \\ \varphi_y(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i) \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \begin{bmatrix} s_{i,x} \cos \xi_\theta - s_{i,y} \sin \xi_\theta + \xi_x \\ s_{i,x} \sin \xi_\theta + s_{i,y} \cos \xi_\theta + \xi_y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_x(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i)}{\partial \xi_x} & \dfrac{\partial \varphi_x(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i)}{\partial \xi_y} & \dfrac{\partial \varphi_x(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i)}{\partial \xi_\theta} \\ \dfrac{\partial \varphi_y(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i)}{\partial \xi_x} & \dfrac{\partial \varphi_y(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i)}{\partial \xi_y} & \dfrac{\partial \varphi_y(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i)}{\partial \xi_\theta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_{i,x} \sin \xi_\theta - s_{i,y} \cos \xi_\theta \\ 0 & 1 & s_{i,x} \cos \xi_\theta - s_{i,y} \sin \xi_\theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{12}
$$

から計算される (ξ_θ に初期値 $\breve{\xi}_\theta$ を代入する)．$\nabla \mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))$ は, 地図上の点 $\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)$ における占有確率の勾配である．各格子の内側では占有確率が一定で, 格子をまたぐと占有確率が一気に変化するので, 格子の内部では勾配が 0 で, 格子の境目では勾配が定義されない．これでは勾配として役に立たないので, 占有確率を線形補間することで, 地図内部で占有確率を連続的に変化させ, 意味のある勾配が得られるようにする．具体的には図 2 に示すように, 地図上の点に対する占有確率を, その点の近傍にある 4 つの格子の占有確率の線形補間から求める．地図上の点を $\boldsymbol{p} = [x, y]^\top$, その近傍の 4 つの格子の位置を $\mathbf{p}_{00} = [x_0, y_0]^\top$, $\mathbf{p}_{01} = [x_0, y_1]^\top$, $\mathbf{p}_{10} = [x_1, y_0]^\top$, $\mathbf{p}_{11} = [x_1, y_1]^\top$ と定める．このとき点 $\boldsymbol{p}$ における占有確率 $\mathcal{M}(\boldsymbol{p})$ は, 4 つの格子の占有確率 $\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{00}), \mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{01}), \mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{10}), \mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{11})$ の線形補間から次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(\boldsymbol{p}) \simeq & \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{11}) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{01}) \right) + \\
& \frac{y_1 - y}{y_1 - y_0} \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{10}) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{00}) \right)
\end{aligned} \tag{13}
$$

点 $\boldsymbol{p}$ における占有確率の微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_x}\mathcal{M}(\boldsymbol{p}) &= \frac{y-y_0}{y_1-y_0}\frac{1}{x_1-x_0}\left(\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{11})-\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{01})\right)+ \\
&\qquad \frac{y_1-y}{y_1-y_0}\frac{1}{x_1-x_0}\left(\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{10})-\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{00})\right) \\
\frac{\partial}{\partial p_y}\mathcal{M}(\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{y_1-y_0}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{11})+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{01})\right)- \\
&\qquad \frac{1}{y_1-y_0}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{10})+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{00})\right) \\
\nabla\mathcal{M}(\boldsymbol{p}) &= \left[\frac{\partial}{\partial p_x}\mathcal{M}(\boldsymbol{p}), \frac{\partial}{\partial p_y}\mathcal{M}(\boldsymbol{p})\right]^\top
\end{aligned}$$

地図の解像度は r であり, 4 つの格子は互いに隣接していると考えると $y_1-y_0=r, x_1-x_0=r$ となるから

$$\frac{\partial}{\partial p_x}\mathcal{M}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{r^2}\left((y-y_0)\left(\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{11})-\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{01})\right)+(y_1-y)\left(\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{10})-\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{00})\right)\right) \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_y}\mathcal{M}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{r^2}\left((x-x_0)\left(\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{11})-\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{10})\right)+(x_1-x)\left(\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{01})-\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{00})\right)\right) \tag{15}$$

上記から, 地図上の点 $\varphi(\breve{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{z}_i) = [x, y]^\top$ における占有確率の勾配 $\nabla\mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{z}_i))$ は以下のように求められる．この点に対応する格子のインデックス (i, j) は, $i = \lfloor x/r \rfloor, j = \lfloor y/r \rfloor$ として計算される．近傍の 4 つの格子は $(i, j), (i, j+1), (i+1, j), (i+1, j+1)$ のインデックスをもち, それらの位置は $\mathbf{p}_{00} = [ir, jr]^\top$, $\mathbf{p}_{01} = [ir, (j+1)r]^\top$, $\mathbf{p}_{10} = [(i+1)r, jr]^\top$, $\mathbf{p}_{11} = [(i+1)r, (j+1)r]^\top$ である．$ir \le x < (i+1)r$ と $jr \le y < (j+1)r$ が成立する．4 つの格子の位置 $\mathbf{p}_{00}, \mathbf{p}_{01}, \mathbf{p}_{10}, \mathbf{p}_{11}$ と占有確率 $\mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{00}), \mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{01}), \mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{10}), \mathcal{M}(\boldsymbol{p}_{11})$, そして点の座標 $[x, y]^\top$ を (14) 式と (15) 式に代入することで, 占有確率の勾配 $\nabla\mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{z}_i))$ が得られる．

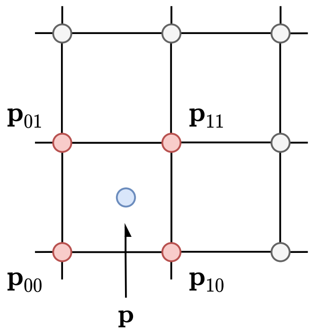

図 2　占有確率の線形補間

以上より, ガウス・ニュートン法によるスキャンマッチング手法は次のようにまとめられる．

アルゴリズム 1 ガウス・ニュートン法によるスキャンマッチング

Input: 姿勢の初期値 $\breve{\boldsymbol{\xi}} = [\breve{\xi}_x, \breve{\xi}_y, \breve{\xi}_\theta]^\top \in \mathrm{SE}(2)$, スキャン $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_N\}, \boldsymbol{z}_i = [s_{i,x}, s_{i,y}]^\top \in \mathbb{R}^2$, 占有格子地図 $\mathcal{M}$, 収束判定に用いる閾値 $\varepsilon \ll 1$

現在の姿勢の推定値 $\boldsymbol{\xi}_1 \leftarrow \breve{\boldsymbol{\xi}}$ として初期化する

for $k = 1, 2, \ldots$ **do**

  (1) 式と現在の姿勢の推定値 $\boldsymbol{\xi}_k$ を使って, 各スキャン点 $\boldsymbol{z}_i$ をセンサ座標系から地図座標系に変換し, $\{\varphi(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{z}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{z}_N)\}$ を得る

  (14) 式と (15) 式から, 各スキャン点 $\varphi(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{z}_i)$ における占有確率の勾配 $\nabla\mathcal{M}(\varphi(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{z}_i))$ を計算する

  (12) 式から, 現在の姿勢の推定値 $\boldsymbol{\xi}_k$ における各スキャン点の座標の勾配 $\nabla\varphi(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{z}_i)$ を計算する

  (9) 式と (10) 式から, 行列 $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ とベクトル $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^3$ を計算する

  (11) 式を利用して, (3) 式の損失関数を最小化するような姿勢の更新量 $\boldsymbol{\Delta\xi}^*$ を計算する

  $\boldsymbol{\xi}_{k+1} \leftarrow \boldsymbol{\xi}_k + \boldsymbol{\Delta\xi}^*$ として姿勢の推定値を更新する

  $|\mathcal{L}(\boldsymbol{\xi}_k; \mathcal{M}, \mathcal{S}) - \mathcal{L}(\boldsymbol{\xi}_{k+1}; \mathcal{M}, \mathcal{S})| < \varepsilon$ であれば, 損失関数が収束したとみなして終了する

グラフベース SLAM などでは, 推定された姿勢 $\boldsymbol{\xi}$ に対する共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ が必要となる. (2) 式の損失関数における各残差 $e_i(\boldsymbol{\xi}) = 1 - \mathcal{M}(\varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}_i))$ は, ガウス分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ に従っているとする (ここでは簡単のため, 全ての残差 $e_1, \ldots, e_N$ に対して平均 0, 共分散 σ^2 とする).

$$e_i(\boldsymbol{\xi}) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \tag{16}$$

上式を (4) 式と同様に, $\breve{\boldsymbol{\xi}}$ のまわりで 1 次の項までテイラー展開すれば

$$e_i(\boldsymbol{\xi}) \simeq e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}}) + \nabla e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}})^\top (\boldsymbol{\xi} - \breve{\boldsymbol{\xi}}) \tag{17}$$

$e_i(\boldsymbol{\xi})$ は, $\boldsymbol{\xi}$ の線形変換として記述される (係数は $\nabla e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}})$). 何らかの変数 $\boldsymbol{x}$ がガウス分布 $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ に従うとき, その線形変換 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ もガウス分布 $\mathcal{N}(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{A})$ に従う. これより, $\boldsymbol{\xi}$ の共分散 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ と, 残差 $e_i(\boldsymbol{\xi})$ の共分散 σ^2 との間には次の関係が成り立つ.

$$\sigma^2 = \nabla e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}})^\top \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\xi}) \nabla e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}}) \tag{18}$$

(18) 式を, 全ての残差 $e_1, \ldots, e_N$ について並べると ($\boldsymbol{I}$ は N 次の単位行列)

$$\sigma^2 \boldsymbol{I} = \boldsymbol{J}^\top \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \nabla e_1(\breve{\boldsymbol{\xi}}) & \cdots & \nabla e_N(\breve{\boldsymbol{\xi}}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times N} \tag{19}$$

(19) 式を変形すると

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\xi}) = \sigma^2 \left(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^\top\right)^{-1} = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \nabla e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}}) \nabla e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}})^\top\right)^{-1} \tag{20}$$

(20) 式に $\nabla e_i(\breve{\boldsymbol{\xi}}) = -\nabla\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)^\top \nabla\mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))$ を代入すれば ((5) 式を参照)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\xi}) &= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \left(-\nabla\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)^\top \nabla\mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))\right) \left(-\nabla\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)^\top \nabla\mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))\right)^\top\right)^{-1} \\
&= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\nabla\mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)\right)^\top \left(\nabla\mathcal{M}(\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i))^\top \nabla\varphi(\breve{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{z}_i)\right)\right)^{-1} \\
&= \sigma^2 \boldsymbol{H}^{-1}
\end{aligned} \tag{21}$$

(21) 式より, 姿勢の推定値 $\boldsymbol{\xi}$ の共分散として, $\sigma^2 \boldsymbol{H}^{-1}$ を利用できる. $\boldsymbol{H}$ は (9) 式で計算した行列である. また係数 σ^2 は残差 e_i の共分散であるが, Hector SLAM の論文 [1] では, 使用したセンサの特性に応じて実験的に決定されるハイパーパラメータとなっている.

1.4 補足

(5) 式には次のような合成関数の微分が現れる.

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} f(g(\boldsymbol{x})) = \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}) \right)^\top \left(\left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{y}) \right|_{\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x})} \right) \tag{22}$$

$g(\boldsymbol{x})$ は M 次元のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^M$ を取って, N 次元のベクトル $g(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^N$ を返す関数である. $f(\boldsymbol{y})$ は N 次元のベクトル $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^N$ を取り, スカラー $f(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ を返す関数である. (5) 式の例では $M = 3, N = 2$ となる (相対姿勢 $\boldsymbol{\xi}$ が 3 次元, 地図上の座標 $\varphi(\boldsymbol{\xi})$ が 2 次元). (22) 式の左辺は, スカラーの M 次ベクトルによる微分だから M 次ベクトルとなる. 右辺第 1 項は, N 次ベクトルの M 次ベクトルによる微分 ($N \times M$ 行列) の転置だから $M \times N$ 行列, 右辺第 2 項は, スカラーの N 次ベクトルによる微分だから N 次ベクトルとなり, 次元の関係が正しいことを確認できる. 各要素に分解して考えてみても, (22) 式の成立を確認できる.

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} f(g(\boldsymbol{x})) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} f(g(\boldsymbol{x})), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_M} f(g(\boldsymbol{x})) \right]^\top \in \mathbb{R}^M$$

として, $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x}) = [g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_N(\boldsymbol{x})]^\top = [y_1, \ldots, y_N]^\top$ とおけば

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(g(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_N(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial x_i} g_1(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial y_1} f + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_i} g_N(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial y_N} f$$

ここで

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} & \cdots & \dfrac{\partial g_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_N(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_N(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} & \cdots & \dfrac{\partial g_N(\boldsymbol{x})}{\partial x_M} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times M}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}) \right)_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(\boldsymbol{x}) \tag{23}$$

また

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{y}) = \left[\frac{\partial}{\partial y_1} f(\boldsymbol{y}), \ldots, \frac{\partial}{\partial y_N} f(\boldsymbol{y}) \right]^\top \in \mathbb{R}^N, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{y}) \right)_j = \frac{\partial}{\partial y_j} f(\boldsymbol{y}) \tag{24}$$

と書けるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(g(\boldsymbol{x})) &= \frac{\partial}{\partial x_i} g_1(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial y_1} f + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_i} g_N(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial y_N} f \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}) \right)_{ji} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{y}) \right)_j \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}) \right)^\top_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{y}) \right)_j \end{aligned}$$

となる．上式より，$\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} f(g(\boldsymbol{x}))$ の i 行目の要素は，$\left(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x})\right)^\top$ の i 行目と $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{y})$ との内積であるから，(22) 式が正しいことが分かる．

参考文献

[1] Stefan Kohlbrecher, Oskar von Stryk, Johannes Meyer, and Uwe Klingauf. A Flexible and Scalable SLAM System with Full 3D Motion Estimation. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Safety, Security, and Rescue Robotics (SSRR)*, pages 155–160, 2011.