行列輪講: 第 2 回 行列式, トレース

松谷研究室

June 2, 2024

目次

目次

このスライドの概要

- 行列式, トレースについて確認する
  - 行列式に関する公式 (転置, 行列積, 逆行列, 固有値, ブロック行列)
  - 行列式と余因子展開
  - トレースに関する公式

目次

行列式 (Determinant)

- 行列式は，行列の大きさのようなもの
- $\{1, 2, \ldots, n\}$ を適当に入れ替えて，$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ を作る．
- このような置換 σ は，全部で $n!$ 通りあって，まとめて S_n で表す．

$$\begin{aligned} S_3 = \{&\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}, \{1,2,3\} \to \{1,3,2\}, \{1,2,3\} \to \{2,1,3\}, \\ &\{1,2,3\} \to \{2,3,1\}, \{1,2,3\} \to \{3,1,2\}, \{1,2,3\} \to \{3,2,1\}\} \end{aligned}$$

- $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ は，何度か入れ替えれば，元の $\{1, 2, \ldots, n\}$ に戻せる．入れ替える回数の偶奇は，一意に定まる．
- 即ち，σ に対して，以下の $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は一意に定まる．

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{偶数回の入れ替えで元に戻せる} \\ -1 & \text{奇数回の入れ替えで元に戻せる} \end{cases}$$

行列式 (Determinant)

- $\sigma = \{1,2,3\} \to \{2,3,1\}$ とすると, $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$.
  - $\{2,3,1\} \to \{2,1,3\} \to \{1,2,3\}$.
- $\sigma = \{1,2,3\} \to \{3,2,1\}$ とすると, $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$.
  - $\{3,2,1\} \to \{2,3,1\} \to \{2,1,3\} \to \{1,2,3\}$.
- $\mathbf{A}$ を n 次正方行列とする.
- S_n と σ を使って, $\mathbf{A}$ の行列式は次のようにかける.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

- $n = 2$ とすると, $S_n = \{\{1,2\},\{2,1\}\}$, $\mathrm{sgn} = (1,-1)$.
- $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- 全部で, $n!$ 個の項が現れる.

3 次行列の行列式

- $\mathbf{A}$ を n 次正方行列とする.
- S_n と σ を使って, $\mathbf{A}$ の行列式は次のようにかける.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

- $n = 3$ とすると,

$$\begin{gathered}
S_3 = \{\{1,2,3\},\{1,3,2\},\{2,1,3\},\{2,3,1\},\{3,1,2\},\{3,2,1\}\} \\
\mathrm{sgn} = (1,-1,-1,1,1,-1) \\
\det(\mathbf{A}) = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) \\
+ a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)
\end{gathered}$$

- これは**サラスの公式**とよばれる.

置換に関する性質

- 置換は全単射 (1 対 1 で対応する).
- 置換 σ の逆写像を, σ^{-1} とかく.

$$\sigma = \{1, 2, 3\} \to \{3, 1, 2\}, \sigma^{-1} = \{1, 2, 3\} \to \{2, 3, 1\}$$

- 以下の 6 つの置換 $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ は, 同じものを指すことに注意.

$$\sigma_1 = \{1, 2, 3\} \to \{2, 3, 1\}, \sigma_2 = \{1, 3, 2\} \to \{2, 1, 3\}$$
$$\sigma_3 = \{2, 1, 3\} \to \{3, 2, 1\}, \sigma_4 = \{2, 3, 1\} \to \{3, 1, 2\},$$
$$\sigma_5 = \{3, 1, 2\} \to \{1, 2, 3\}, \sigma_6 = \{3, 2, 1\} \to \{1, 3, 2\}$$

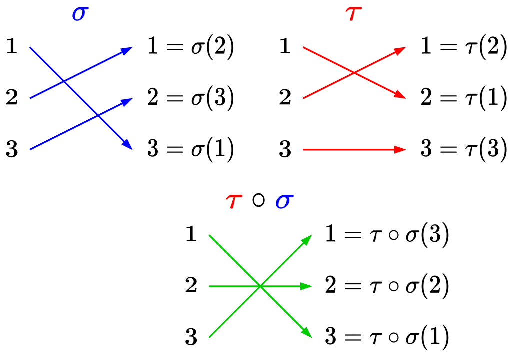
- 2 つの置換の合成 $\tau \circ \sigma$ も, 新たな置換となる.

$$\sigma = \{1, 2, 3\} \to \{3, 1, 2\}, \tau = \{1, 2, 3\} \to \{2, 1, 3\}$$
$$\tau \circ \sigma = \{1, 2, 3\} \to \{3, 2, 1\}$$

置換に関する性質

- 2 つの置換の合成 $\tau \circ \sigma$ も, 新たな置換となる.

$$\sigma = \{1,2,3\} \to \{3,1,2\}\,, \tau = \{1,2,3\} \to \{2,1,3\}$$
$$\tau \circ \sigma = \{1,2,3\} \to \{3,2,1\}$$



置換に関する性質

- 恒等置換を, ι とかく.

$$\iota = \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$$

- $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \iota, \quad \mathrm{sgn}(\tau\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau)\,\mathrm{sgn}(\sigma)$
- $\mathrm{sgn}(\iota) = 1, \quad \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$
- $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$ を行列, σ を置換としたとき,

$$a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} = a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

- $\sigma = \{1,2,3\} \to \{2,3,1\}$ とする. $\sigma^{-1} = \{2,3,1\} \to \{1,2,3\}$ となる.

$$\begin{aligned} a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}a_{\sigma^{-1}(3)3} &= a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31} \\ &= a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)} \end{aligned}$$

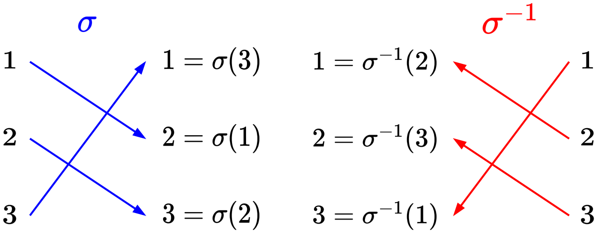
置換に関する性質

- $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$ を行列, σ を置換としたとき,

$$a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} = a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

- $\sigma = \{1,2,3\} \to \{2,3,1\}$ とする. $\sigma^{-1} = \{2,3,1\} \to \{1,2,3\}$ となる.

$$a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}a_{\sigma^{-1}(3)3} = a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$$



転置の行列式

転置の行列式

$$\det\left(\mathbf{A}^\top\right) = \det(\mathbf{A})$$

- 行列式の定義から,

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\begin{aligned}\det\left(\mathbf{A}^\top\right) &= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \left(\mathbf{A}^\top\right)_{1\tau(1)} \left(\mathbf{A}^\top\right)_{2\tau(2)} \left(\mathbf{A}^\top\right)_{n\tau(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n}\end{aligned}$$

転置の行列式

- 行列式の定義から,

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\det\left(\mathbf{A}^\top\right) = \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n}$$

- σ^{-1} について総和を取ることは, σ について総和を取ることと同じだから, $\tau = \sigma^{-1}$ とする.
- $\tau = \sigma^{-1}$ とおくと, $\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ であり, 以下が成り立つので, $\det(\mathbf{A}) = \det\left(\mathbf{A}^\top\right)$.

$$\begin{aligned} a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n} &= a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

対角行列の行列式

対角行列の行列式

n 次の対角行列があるとする．行列式は，対角成分 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の積となる．

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \prod_i \lambda_i$$

- 行列式の定義において，恒等置換 ι に対応する項だけが残る：

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_i \lambda_i \end{aligned}$$

上三角行列, 下三角行列の行列式

上三角行列, 下三角行列の行列式

$n \times n$ の上三角, 下三角行列があるとする. 行列式は, 対角成分 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の積となる.

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \prod_i \lambda_i$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ * & \lambda_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & * & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \prod_i \lambda_i$$

上三角行列, 下三角行列の逆行列の行列式

元の対角成分の逆数 $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ の積となる.

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1}\right) = \prod_i \lambda_i^{-1}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ * & \lambda_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & * & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1}\right) = \prod_i \lambda_i^{-1}$$

列の線形変換, 列の入れ替え, 行列のスカラー倍

列の線形変換, 列の入れ替え

列を入れ替えると, 行列式の符号が反転する.

$$\det\Big(\big(\mathbf{a}_1, \ldots, \lambda\mathbf{a}_i + \mu\mathbf{b}_i, \ldots, \mathbf{a}_n\big)\Big) = \lambda\det\Big(\big(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n\big)\Big) + \mu\det\Big(\big(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{b}_i, \ldots, \mathbf{a}_n\big)\Big)$$

$$\det\Big(\big(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n\big)\Big) = -\det\Big(\big(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n\big)\Big)$$

行列のスカラー倍

行列を c 倍すると, 行列式は c^n 倍になる.

$$\det(c\mathbf{A}) = c^n\det(\mathbf{A})$$

- $\det\left(\mathbf{A}^\top\right) = \det(\mathbf{A})$ であるから, 列だけでなく, 行についても同様のことがいえる.

列の線形変換, 列のスカラー倍

同じ列を含むとき

同じ列ベクトルを 2 箇所に含むとき, 行列式は 0 となる.

$$\det\left(\left(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n\right)\right) = 0$$

列のスカラー倍

列を c 倍すると, 行列式は c 倍になる.

$$\det\left(\left(\mathbf{a}_1, \ldots, c\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n\right)\right) = c\det\left(\left(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n\right)\right)$$

i 列目に, j 列目の c 倍を足しても $(i \neq j)$, 行列式は変わらない.

$$\det\left(\left(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n\right)\right) = \det\left(\left(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n\right)\right)$$

- $\det\left(\mathbf{A}^\top\right) = \det(\mathbf{A})$ であるから, 列だけでなく, 行についても同様のことがいえる.

行列積, 行列の累乗, 逆行列

行列積, 行列の累乗の行列式

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$$
$$\det(\mathbf{A}^n) = \det(\mathbf{A})^n$$

逆行列の行列式

$$\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

- 以下の 2 つの式から分かる.

$$\det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right) = \det(\mathbf{A})\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)$$
$$\det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right) = \det(\mathbf{I}) = 1$$

固有値と固有ベクトル

- $\mathbf{A}$ を, n 次正方行列とする.
- 以下を満たすような λ を, $\mathbf{A}$ の固有値という.
- また $\mathbf{x}$ を, 固有値 λ に対する固有ベクトルという.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- 上式は, $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ と同値である (詳細は省略).
- $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ の左辺を展開すれば, λ に関する n 次式となる:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

- 上式は, 固有多項式という. 重複を許せば, 固有値は n 個ある.
- $\mathbf{A}$ が正則であれば (逆行列があれば), $\lambda_i \neq 0$.

固有値と固有ベクトル

- $\mathbf{A}$ の逆行列の固有値は, $\mathbf{A}$ の固有値の逆数 $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ である.
- また, $\mathbf{A}$ の逆行列は, $\mathbf{A}$ と共通の固有ベクトルをもつ.
- $\mathbf{A}$ の固有値は以下を満たす.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- これを式変形すればよい ($\mathbf{A}$ は正則なので, $\lambda \neq 0$).

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \qquad \rightarrow \qquad \lambda^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

固有値と行列式

固有値と行列式

$\mathbf{A}$ を, n 次正方行列とする. $\mathbf{A}$ の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の積は, $\mathbf{A}$ の行列式となる.

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

- 以下の固有多項式について, $\lambda = 0$ とする.

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

- 左辺は, $\det(-\mathbf{A}) = (-1)^n \det(\mathbf{A})$.
- 右辺は, $\prod_i(-\lambda_i) = (-1)^n \prod_i \lambda_i$.

固有値と行列式

固有値と行列式

$\mathbf{A}$ を，n 次正方行列とする．$\mathbf{A}$ の固有値の逆数 $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ の積は，$\mathbf{A}^{-1}$ の行列式となる．

$$\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1}$$

- $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \det(\mathbf{A})^{-1}$ と，$\det(\mathbf{A}) = \prod_i \lambda_i$ から分かる．

ブロック上三角行列, 下三角行列の行列式

ブロック上三角行列, 下三角行列の行列式

$$\det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\right) = 1, \quad \det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\right) = 1$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\right) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D})$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\right) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D})$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}\right) = \det(\mathbf{A}+\mathbf{B})\det(\mathbf{A}-\mathbf{B})$$

- 証明は省略.

ブロック対角行列の行列式

ブロック対角行列の行列式

$$\det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_n \end{pmatrix}\right) = \det(\mathbf{A}_1)\det(\mathbf{A}_2)\cdots\det(\mathbf{A}_n)$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_n \end{pmatrix}^{-1}\right) = \det(\mathbf{A}_1)^{-1}\det(\mathbf{A}_2)^{-1}\cdots\det(\mathbf{A}_n)^{-1}$$

ブロック行列の行列式

ブロック行列の行列式

$$\det\left(\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix}\right) = \det(\mathbf{A})\det\left(\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right) \qquad \mathbf{A}\text{ が正則}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix}\right) = \det(\mathbf{D})\det\left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\right) \qquad \mathbf{D}\text{ が正則}$$

- シューア補行列による表現から導出できる (上側).

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix}$$

- 3 つの行列の行列式の積を求める.
- 最初と最後の行列の行列式は 1 である.

ブロック行列の行列式

Weinstein-Aronszajn Identity

$\mathbf{A}$ を $m \times n$, $\mathbf{B}$ を $n \times m$ の行列とする.

$$\det(\mathbf{I}_m + \mathbf{AB}) = \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{BA})$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が m 次ベクトルであるとき,

$$\det\left(\mathbf{I}_m + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top\right) = 1 + \mathbf{b}^\top\mathbf{a}$$

- 先ほどの式において ($\mathbf{I}_m$, $\mathbf{I}_n$ は正則であるので),

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{pmatrix}\mathbf{I}_m & -\mathbf{A}\\ \mathbf{B} & \mathbf{I}_n\end{pmatrix}\right) &= \det(\mathbf{I}_m)\det\left(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}\mathbf{I}_m^{-1}\mathbf{A}\right) = \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{BA})\\ &= \det(\mathbf{I}_n)\det\left(\mathbf{I}_m + \mathbf{A}\mathbf{I}_n^{-1}\mathbf{B}\right) = \det(\mathbf{I}_m + \mathbf{AB})\end{aligned}$$

余因子展開

余因子展開

$\mathbf{A}$ を, n 次正方行列とする. 各 i 行目と j 列目について,

$$\det(\mathbf{A}) = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_j a_{ij}\Delta_{ij}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} = \sum_i a_{ij}\Delta_{ij}$$

- 上式の Δ_{ij} は, $\mathbf{A}$ の (i, j) 余因子 (Cofactor) とよぶ.

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(\tilde{\mathbf{A}}_{ij}\right)$$

- $\tilde{\mathbf{A}}_{ij}$ は, $\mathbf{A}$ から i 行目と j 列目を取り除いた, $n-1$ 次行列である.
- Δ_{ij} は, i 行目と j 行目の成分には依存しない.

余因子展開

$\mathbf{A}$ を, n 次正方行列とする. Δ_{ij} を $\mathbf{A}$ の (i,j) 余因子とする.

$$a_{i1}\Delta_{k1} + a_{i2}\Delta_{k2} + \cdots + a_{in}\Delta_{kn} = \begin{cases} \det(\mathbf{A}) & i = k \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$a_{1j}\Delta_{1k} + a_{2j}\Delta_{2k} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nk} = \begin{cases} \det(\mathbf{A}) & j = k \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

余因子行列

余因子行列

$\mathbf{A}$ を，n 次行列とする．$\mathbf{A}$ の (i,j) 余因子 Δ_{ij} を並べた行列 $\mathrm{adj}\,\mathbf{A}$ を，$\mathbf{A}$ の余因子行列という．

$$\mathrm{adj}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{adj}\,\mathbf{A}$ の (i,j) 成分は，(j,i) 余因子 Δ_{ji} となる．

余因子行列, 行列式, 逆行列

余因子行列, 行列式, 逆行列

$\mathbf{A}$ の余因子行列 $\operatorname{adj}\mathbf{A}$, 行列式 $\det(\mathbf{A})$, 逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ について,

$$(\operatorname{adj}\mathbf{A})\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,(\operatorname{adj}\mathbf{A}) = (\det(\mathbf{A}))\,\mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\operatorname{adj}\mathbf{A}$$

目次

行列のトレース

- $\mathbf{A}$ を，n 次正方行列とする．
- $\mathbf{A}$ の対角成分 a_{ii} の和を，$\mathbf{A}$ のトレースとよぶ．
- トレースを，$\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ とかく．

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_i a_{ii}$$

- 歪対称行列 $(\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A})$ の対角成分は 0 なので，トレースは 0.
- 単位行列 $\mathbf{I}_n$ のトレースは n.

行列の和, 転置とトレース

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})$$
$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^\top\right) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$$

- トレースの定義から, 以下のように確認できる.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \sum_i (\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ii} = \sum_i (a_{ii}+b_{ii}) = \sum_i a_{ii} + \sum_i b_{ii} \\ &= \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B}) \\ \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^\top\right) &= \sum_i \left(\mathbf{A}^\top\right)_{ii} = \sum_i a_{ii} = \mathrm{tr}(\mathbf{A})\end{aligned}$$

行列の積とトレース

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$$

- トレースの定義から，以下のように確認できる．

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) &= \sum_i (\mathbf{AB})_{ii} = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_k \sum_i b_{ki} a_{ik} \\ &= \sum_k (\mathbf{BA})_{kk} = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})\end{aligned}$$

トレースの循環性

トレースの循環性

$$\mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BCA}) = \mathrm{tr}(\mathbf{CAB})$$

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}\right) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$$

- トレースの定義から，以下のように確認できる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) &= \sum_i (\mathbf{ABC})_{ii} = \sum_i \sum_k \sum_l a_{ik} b_{kl} c_{li} \\
&= \sum_k \sum_l \sum_i b_{kl} c_{li} a_{ik} = \mathrm{tr}(\mathbf{BCA}) \\
&= \sum_l \sum_i \sum_k c_{li} a_{ik} b_{kl} = \mathrm{tr}(\mathbf{CAB})
\end{aligned}$$

- たらい回しのような公式である．

行列, ベクトル積とトレース

行列, ベクトル積とトレース

$\mathbf{A}$ を, n 次正方行列, $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ を n 次ベクトルとする.

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{c}^\top\right) = \mathbf{c}^\top\mathbf{A}\mathbf{b}$$

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{b}\mathbf{c}^\top\right) = \mathbf{c}^\top\mathbf{b}$$

- $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ がベクトルで, 上のような形であれば, 順序を入れ替えることでトレース tr を除去できる.

固有値とトレース

固有値とトレース

$\mathbf{A}$ を，n 次正方行列とする．$\mathbf{A}$ の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の和は，$\mathbf{A}$ のトレースとなる．

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_i \lambda_i$$

- 以下の固有多項式について，λ^{n-1} の係数を考える．

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

- 左辺は，$-\mathrm{tr}(\mathbf{A})$．
  - $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ には，$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$ という項が現れる．
  - λ^{n-1} の係数は，$-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$ となる．
- 右辺は，$-\sum_i \lambda_i$．

逆行列とトレース

逆行列とトレース

$\mathbf{A}$ を，n 次正方行列とする．$\mathbf{A}$ の逆行列のトレースは，$\mathbf{A}$ の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の逆数の和となる．

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \sum_i \lambda_i^{-1}$$

- $\mathbf{A}$ は，ユニタリ行列 $\mathbf{P}$ により，$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ と三角化できる (後述)．
- $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ の対角成分は，$\mathbf{A}$ の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ である．
- $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ の逆行列も三角行列で，$\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ を対角成分にもつので，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)^{-1}\right) &= \sum_i \lambda_i^{-1} \\ &= \mathrm{tr}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\end{aligned}$$

対角行列のトレース

対角行列のトレース

$\mathbf{A} = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を n 次対角行列とする．$\mathbf{A}, \mathbf{A}^{-1}$ のトレースは，次のようになる．

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}\right) = \sum_i a_i$$

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix}\right) = \sum_i a_i^{-1}$$

上三角行列, 下三角行列の逆行列のトレース

上三角行列, 下三角行列の逆行列のトレース

元の対角成分の逆数 $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ の和となる.

$$\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1}\right) = \sum_i \lambda_i^{-1}$$

$$\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ * & \lambda_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & * & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1}\right) = \sum_i \lambda_i^{-1}$$

ブロック行列のトレース

ブロック行列のトレース

$$
\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & * & \cdots & * \\ * & \mathbf{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & \mathbf{A}_n \end{pmatrix}\right) = \sum_i \mathrm{tr}(\mathbf{A}_i)
$$

固有値, 対角化, 三角化に関するまとめ

- $\mathbf{A}$ を, n 次正方行列とする.
- $\mathbf{A}$ に n 個の線形独立な固有ベクトルがあれば, それを並べた行列 $\mathbf{P}$ で, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ と対角化できる (対角成分は $\mathbf{A}$ の固有値).
- 任意の $\mathbf{A}$ は, ユニタリ行列 $\mathbf{P}$ で, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ と三角化できる (上三角行列, 対角成分は $\mathbf{A}$ の固有値).
- $\mathbf{A}$ が正規行列 ($\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$) なら, ユニタリ行列で対角化できる.
  - $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ は, $\mathbf{A}$ の共役転置.
  - 正規行列: ユニタリ行列 ($\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{I}$), エルミート行列 ($\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}$), 歪エルミート行列 ($\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = -\mathbf{A}$), 直交行列 ($\mathbf{A}\mathbf{A}^{\top} = \mathbf{I}$), 対称行列 ($\mathbf{A}^{\top} = \mathbf{A}$), 歪対称行列 ($\mathbf{A}^{\top} = -\mathbf{A}$).
- $\mathbf{A}$ が実対称行列なら, 直交行列で対角化できる.
- エルミート行列と対称行列の固有値は, 全て実数である.