グラフベース SLAM 入門

松谷研究室

慶應義塾大学理工学部情報工学科 松谷研究室

May 27, 2020

目次

目次

目次

目次

目次

SLAM の概要

- SLAM: Simultaneous Localization And Mapping
  - 地図構築と自己位置推定の同時実行
- SLAM の入力と出力
  - 入力: 制御 / センサデータ
  - 出力: ロボットの姿勢 / 地図
- ここで想定する SLAM
  - 2 次元
  - グラフベース
  - レーザスキャナ (LiDAR) を使用
  - 地図の形式については考慮しない

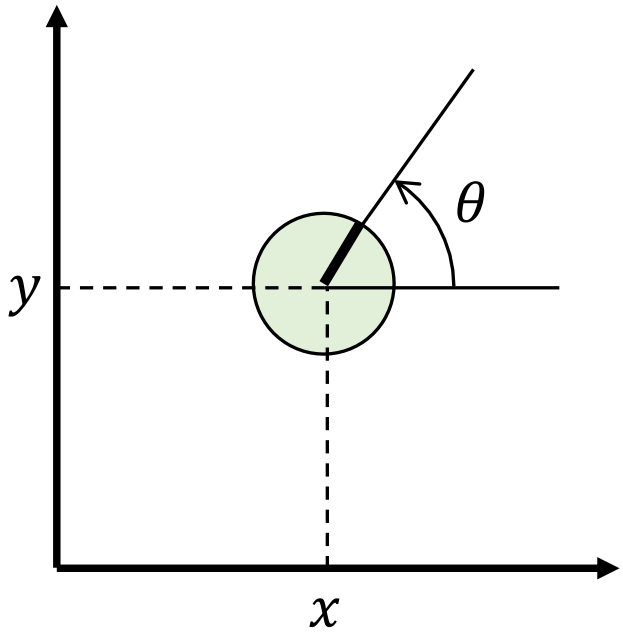
SLAM の概要

- SLAM の入力と出力
  - 入力: 制御 / センサデータ
  - 出力: ロボットの姿勢 / 地図

- 記号の整理
  - 時刻 t ($t \geq 0$, t は整数)
  - ロボットの姿勢 $x_t = \left[\xi_t^x, \xi_t^y, \xi_t^\theta\right]^\top$ (位置 x, y と回転角 θ)
  - 制御 $u_t = \left[\delta_t^x, \delta_t^y, \delta_t^\theta\right]^\top$ (相対姿勢)
  - センサデータ $z_t = \left\{z_t^i\right\}$, $z_t^i = \left[r_t^i, \theta_t^i\right]^\top$
    センサ中心から障害物までの, 距離と方向の集合 (スキャンデータ)
  - 地図 m

SLAM の概要

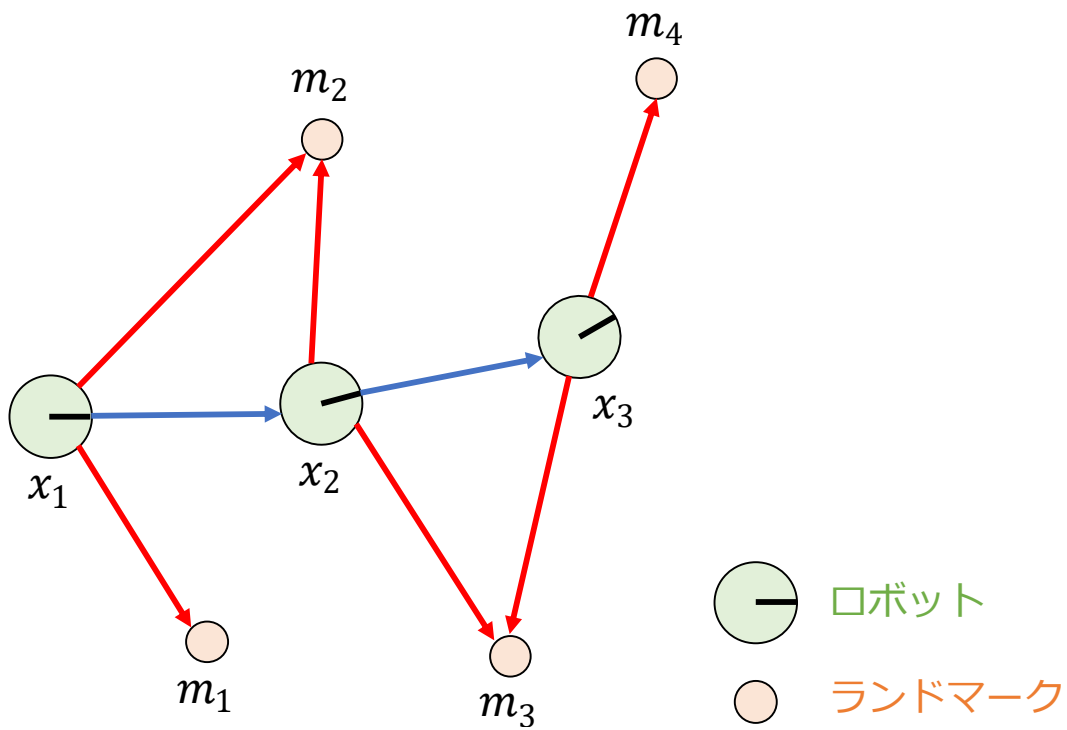
- ロボットの姿勢 $x_t = \left[\xi_t^x, \xi_t^y, \xi_t^\theta\right]^\top$
  - ワールド座標系で表現
  - 位置の成分 ξ^x, ξ^y と回転角の成分 ξ^θ
  - ξ^θ はヨー角 (z 軸まわりの回転)



目次

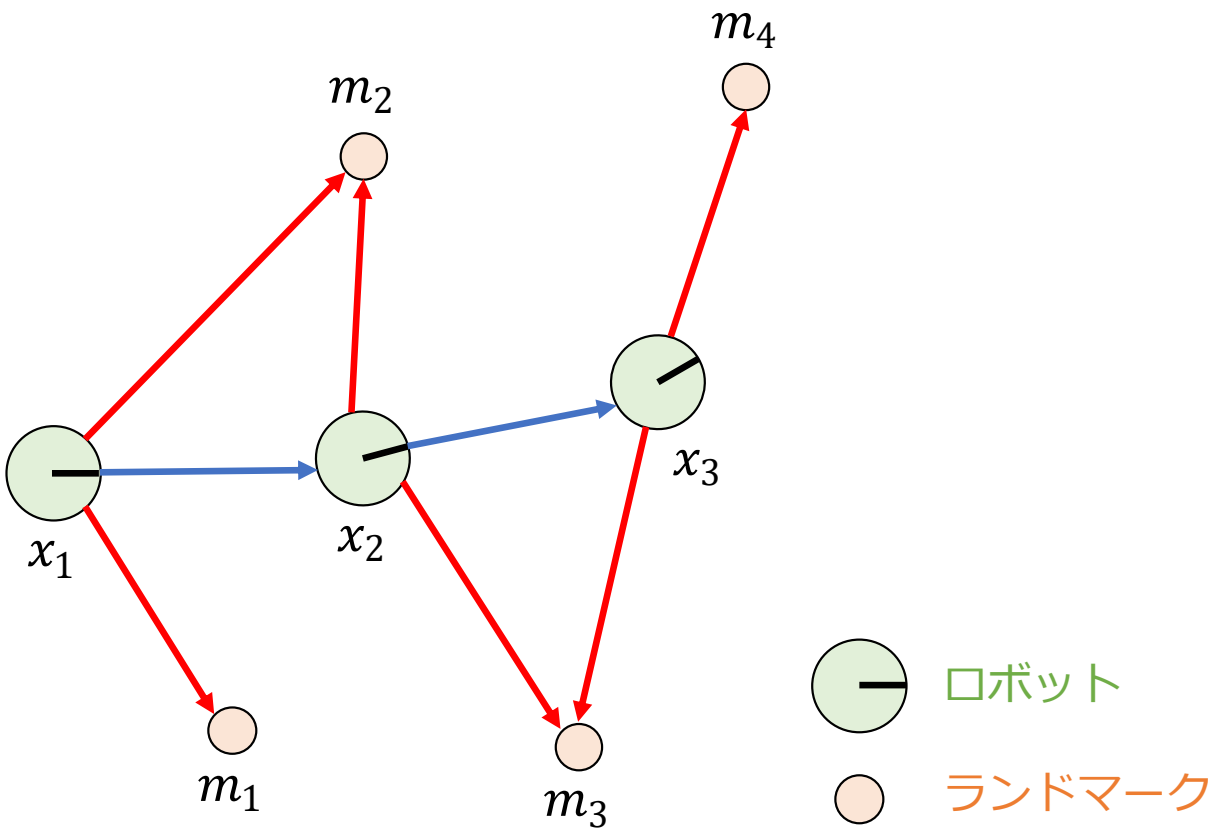
SLAM の流れ

- ロボットは, 各時刻においてランドマークを観測 [16]
  - ランドマーク: 位置の目印 (特徴的なもの)
  - ロボット中心からランドマークまでの, 距離と方向を計測
  - ロボットは, 各ランドマークを区別できるとする (簡単のため)



SLAM の流れ

- ロボットは，各時刻においてランドマークを観測 [16]
  - 時刻 $t = 1$ で，ロボットはランドマーク m_1 と m_2 を観測
  - 計測されたランドマークを合わせて，地図を構築



SLAM の流れ

- ロボットは, 各時刻においてランドマークを観測 [16]
  - ランドマークは, ロボット座標系で表現される

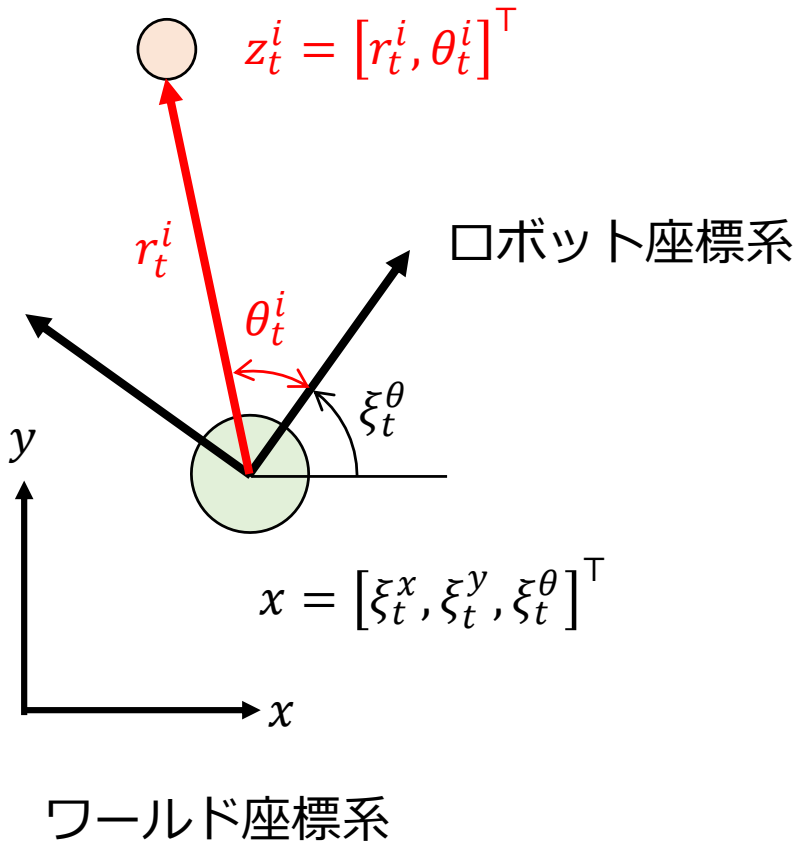
    $\Rightarrow$ ロボットの姿勢を用いて, ワールド座標系へ変換

    $\Rightarrow$ 地図にランドマークを追加して拡張

- 地図を構築するには, ロボットの姿勢が必要
  - ロボットの姿勢 x_t は, 逐次的に更新される
  - 以前の姿勢 x_{t-1} に, 制御 u_t を適用させて, x_t を得る
  - 自己位置推定の基本となる処理

SLAM の流れ

- ロボットは, 各時刻においてランドマークを観測 [16]
  - 時刻 t で, j 番目のランドマーク m_j を観測
  - 計測 z_t の i 番目 $z_t^i = \left[r_t^i, \theta_t^i\right]^\top$ が, m_j に対応しているとする



SLAM の流れ

- ロボットは, 各時刻においてランドマークを観測 [16]
  - $z_t^i = \left[r_t^i, \theta_t^i\right]^\top$ は, ロボット座標系で表現 (極座標)
  - r_t^i, θ_t^i は, ロボット中心からランドマークまでの距離と角度

  - ワールド座標系 $p_t^i = \left[p_t^{i,x}, p_t^{i,y}\right]^\top$ に変換する式

$$\begin{bmatrix} p_t^{i,x} \\ p_t^{i,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_t^x \\ \xi_t^y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_t^i \cdot \cos\left(\xi_t^\theta + \theta_t^i\right) \\ r_t^i \cdot \sin\left(\xi_t^\theta + \theta_t^i\right) \end{bmatrix} \tag{1}$$

SLAM の流れ

- ロボットは, 各時刻においてランドマークを観測 [16]
  - ランドマークは, ロボット座標系で表現される

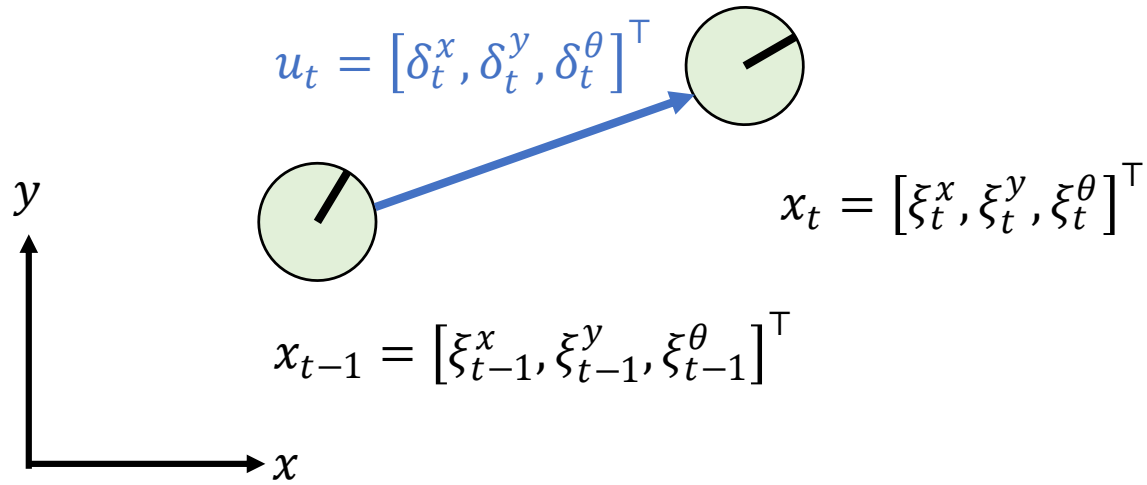
    $\Rightarrow$ ロボットの姿勢を用いて, ワールド座標系へ変換

    $\Rightarrow$ 地図にランドマークを追加して拡張

- 地図を構築するには, ロボットの姿勢が必要
  - ロボットの姿勢 x_t は, 逐次的に更新される
  - 以前の姿勢 x_{t-1} に, 制御 u_t を適用させて, x_t を得る
  - 自己位置推定の基本となる処理

SLAM の流れ

- ロボットの姿勢の更新 [12] [16]
  - 以前の姿勢 x_{t-1} に，制御 u_t を適用させて，x_t を得る
  - 制御 $u_t = \left[\delta_t^x, \delta_t^y, \delta_t^\theta\right]^\top$ は，x_{t-1} と x_t の相対姿勢とする
  - $u_t = \left[\delta_t^x, \delta_t^y, \delta_t^\theta\right]^\top$ は，ロボット座標系で表現



ワールド座標系

SLAM の流れ

- ロボットの姿勢の更新 [16]
  - x_{t-1} と u_t から，新たな姿勢 x_t を求める式

$$\begin{bmatrix} \xi_t^x \\ \xi_t^y \\ \xi_t^\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi_{t-1}^\theta & -\sin \xi_{t-1}^\theta & 0 \\ \sin \xi_{t-1}^\theta & \cos \xi_{t-1}^\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_t^x \\ \delta_t^y \\ \delta_t^\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{t-1}^x \\ \xi_{t-1}^y \\ \xi_{t-1}^\theta \end{bmatrix} \tag{2}$$

  - Compounding 演算子 $\oplus$ を用いて，$x_t = x_{t-1} \oplus u_t$ と表現

  - x_{t-1} と x_t から，制御 u_t(相対姿勢) を求める式

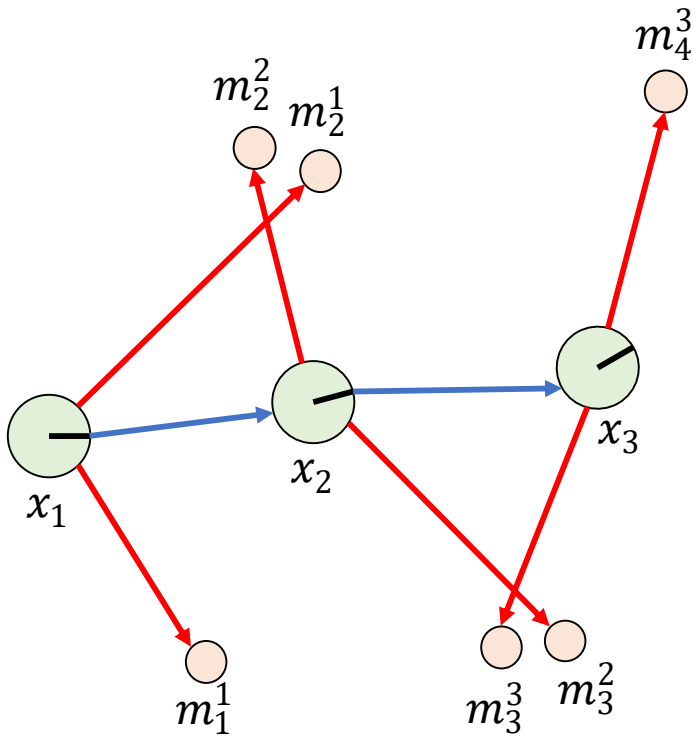
$$\begin{bmatrix} \delta_t^x \\ \delta_t^y \\ \delta_t^\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi_{t-1}^\theta & \sin \xi_{t-1}^\theta & 0 \\ -\sin \xi_{t-1}^\theta & \cos \xi_{t-1}^\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_t^x - \xi_{t-1}^x \\ \xi_t^y - \xi_{t-1}^y \\ \xi_t^\theta - \xi_{t-1}^\theta \end{bmatrix} \tag{3}$$

  - Inverse Compounding 演算子 $\ominus$ を用いて，$u_t = x_t \ominus x_{t-1}$ と表現
  - $u_t = x_t \ominus x_{t-1}$ であるとき，$x_t = x_{t-1} \oplus u_t$ が成り立っている

SLAM の流れ

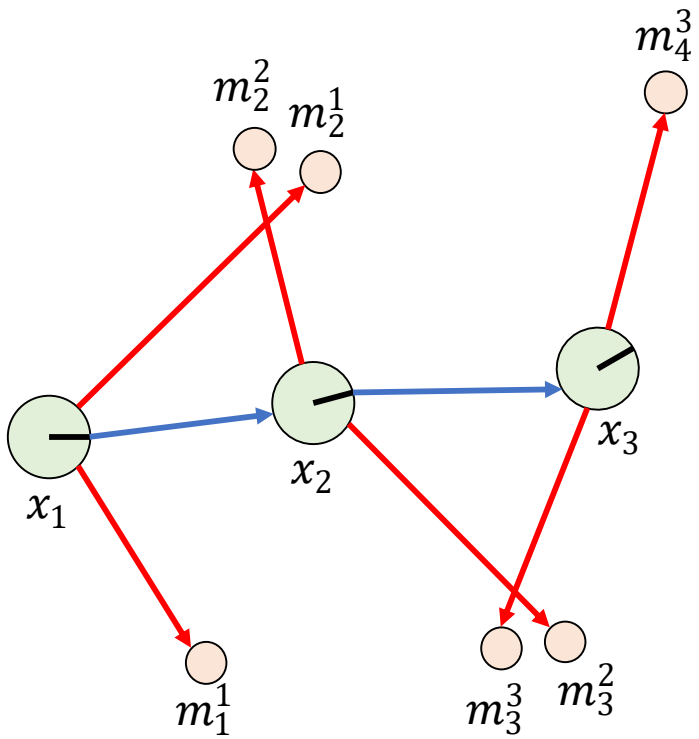
- 誤差の影響を常に受ける [16]
  - m_j^i: 位置 x_i で観測した j 番目のランドマーク (ワールド座標系)
  - 同一のランドマークを観測していても, 位置がずれる $(m_2^1 \neq m_2^2)$

    $\Leftarrow$ 制御 u_1 と計測 z_1, z_2 に誤差があるため



SLAM の流れ

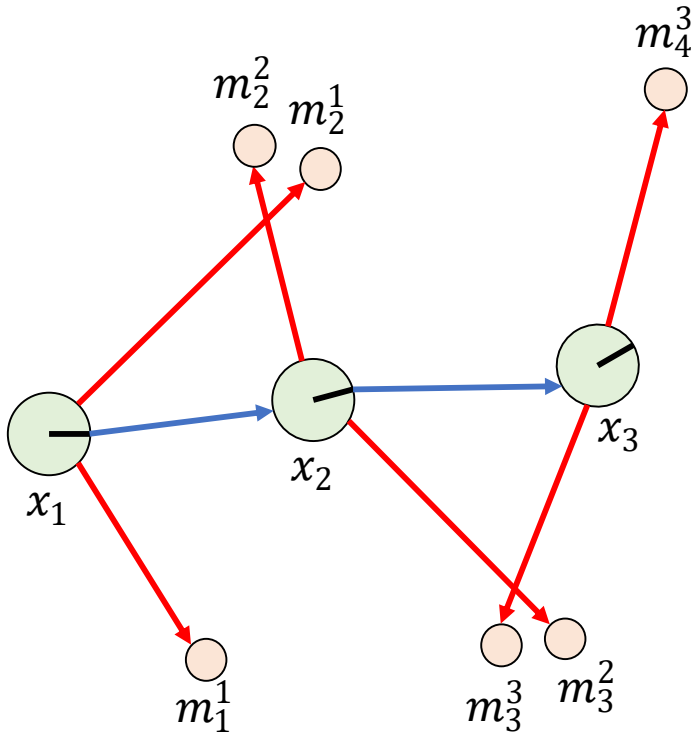
- 誤差の影響を常に受ける [16]
  - m_2^2 は 2 番目のランドマークで, m_2^1 と重なるべき
  - m_3^3 は 3 番目のランドマークで, m_3^2 と重なるべき
  - ランドマーク同士が重なり合うように, ロボットの位置 x_2, x_3 を修正



SLAM の流れ

- 誤差の影響を常に受ける [16]
  - ロボットの姿勢が x_2 であるとき, m_1^1 と m_2^1 は地図に取り込まれている
  - m_2^2 が m_2^1 と同じ位置になるように, x_2 を修正

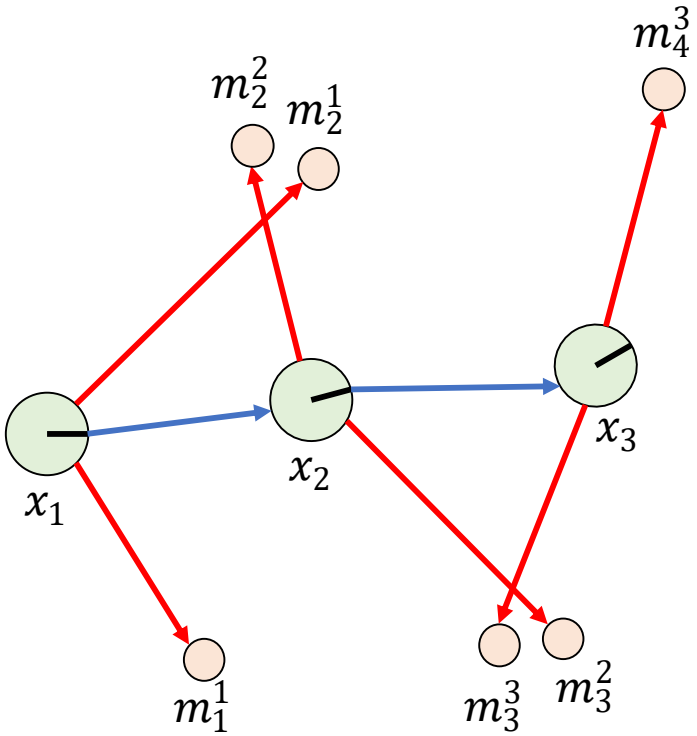
    $\Rightarrow$ 修正した姿勢 x_2 の下で, ランドマーク m_2^2, m_3^2 を地図上に配置



SLAM の流れ

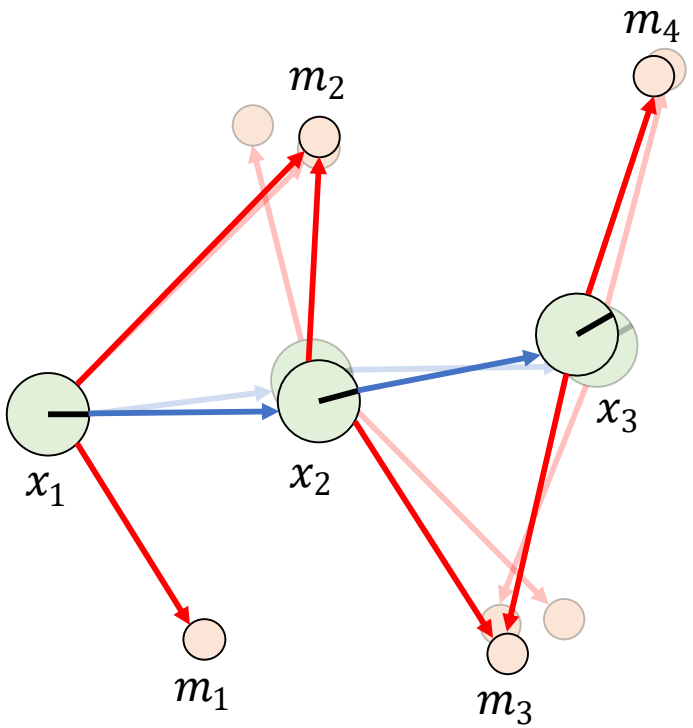
- 誤差の影響を常に受ける [16]
  - ロボットの姿勢が x_3 であるとき，m_3^2 は地図に取り込まれている
  - m_3^3 が m_3^2 と同じ位置になるように，x_3 を修正

    $\Rightarrow$ 修正した姿勢 x_3 の下で，ランドマーク m_3^3, m_4^3 を地図上に配置



SLAM の流れ

- 誤差の影響を常に受ける [16]
  - ランドマークと地図との重ね合わせにより，精度の良い姿勢を得る
  - この重ね合わせ処理を，スキャンマッチングという
  - スキャンマッチングを行うためには，地図が必要



SLAM の流れ

- 自己位置推定と地図構築のステップ
  1. 以前の姿勢 x_{t-1} に制御 u_t を適用させ，新たな姿勢 x'_t を得る
  2. スキャンマッチングにより，改良した姿勢 x_t を得る
     $\Leftarrow$ ランドマークと地図との重ね合わせ処理
  3. 改良した姿勢 x_t を使って，ランドマークを地図に追加

  - 制御 u_t を使わなくても，新たな姿勢 x_t は計算できる
    $\Leftarrow$ 以前の姿勢 x_{t-1} を初期値としたスキャンマッチングを実行

- 自己位置推定を行うためには，地図が必要
  $\Longleftrightarrow$ 地図を構築するには，ロボットの姿勢 (自己位置) が必要

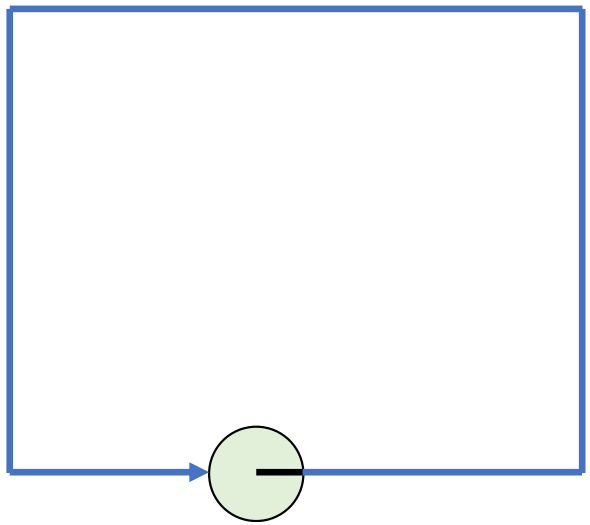
SLAM の流れ

- 自己位置推定と地図構築の間には，相互依存関係がある
  - 誤差が互いに影響し合う $\Rightarrow$ 誤差が累積する
  - 自己位置推定に含まれる誤差 $\Rightarrow$ 地図 (ランドマーク位置) の誤差
  - 地図 (ランドマーク位置) の誤差 $\Rightarrow$ 自己位置推定の誤差
- 上記のステップだけでは，誤差が累積してしまう
  - ループ閉じ込みにより解決
  - 文献 [16] の 10 章を基に説明

目次

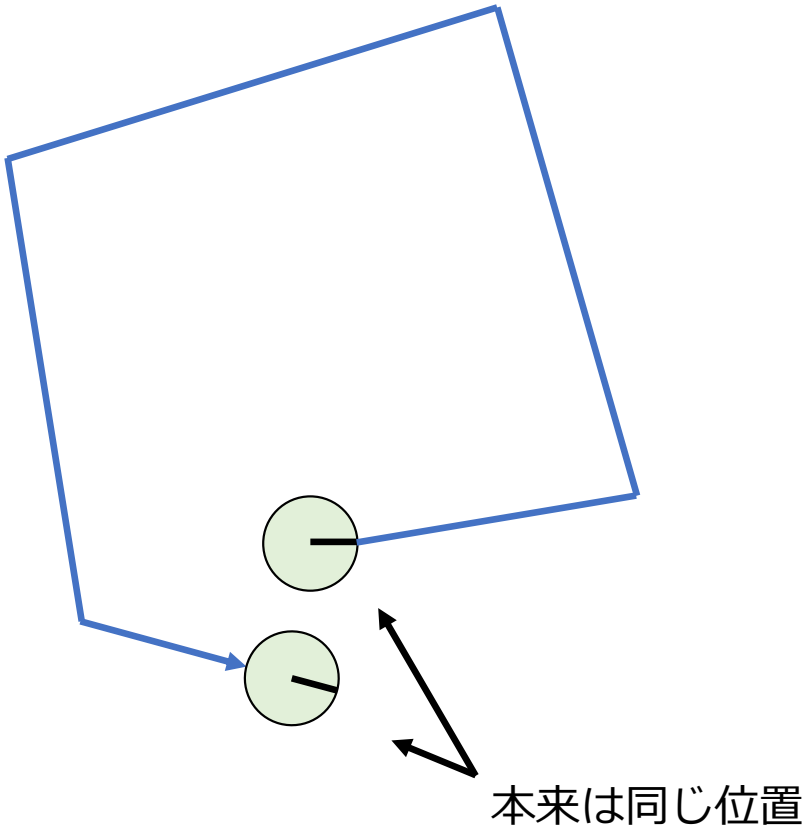
ループ閉じ込み

- ロボットが建物内を一周して，同じ場所に戻ってくる [16]
  - 誤差がなければ，ロボットの軌跡はループ状になる (ループが閉じる)



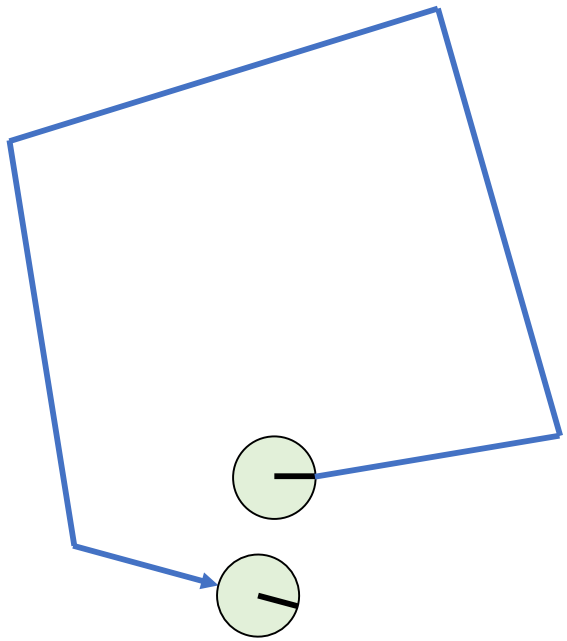
ループ閉じ込み

- ロボットが建物内を一周して，同じ場所に戻ってくる [16]
  - 実際には累積誤差の影響で，同じ場所には戻らない (ループが閉じない)
  - 地図が歪む



ループ閉じ込み

- 地図の歪みの影響 [16]
  - 地図上では通路になっているが, 実際には壁や障害物があって通れない
  - 同一の通路が 2 箇所にできる (同一の場所が地図上に複数現れる)
  - 本来は交差するはずの通路が交わらない / 偽の交差点ができる
  - 目的地までたどり着けない (ナビゲーションに使えない)

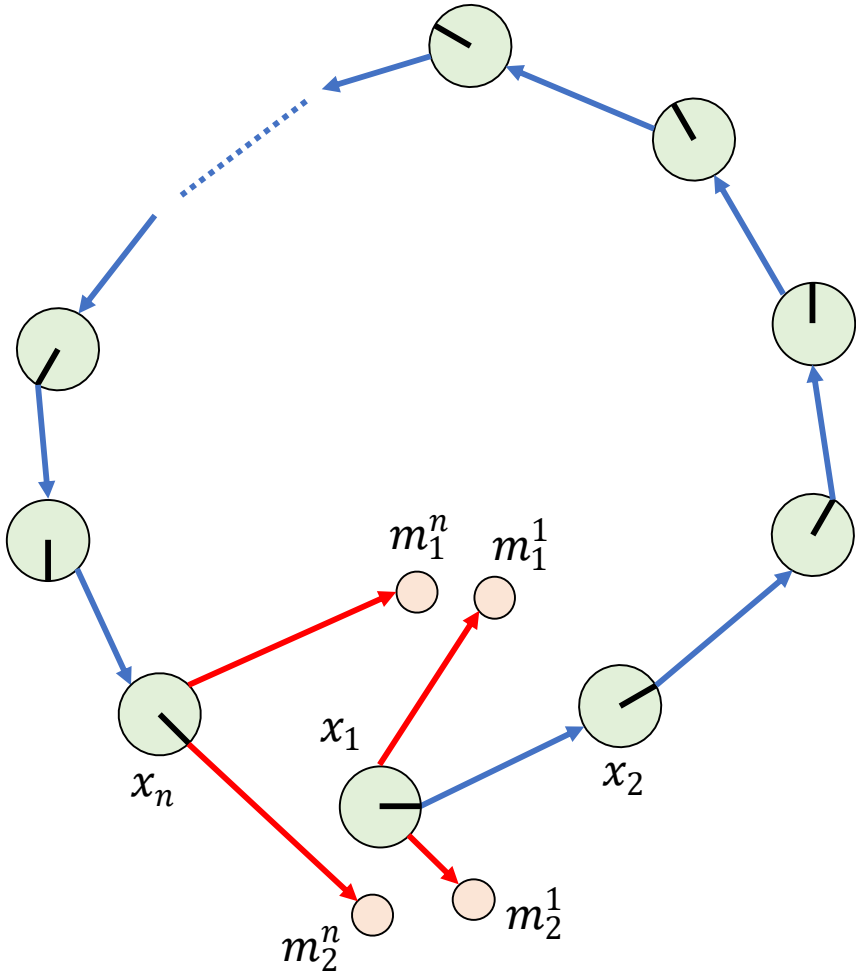


ループ閉じ込み

- ループ閉じ込みの手順 [16]
  1. ループ検出 (Loop Detection)
     ロボットが同じ場所に戻ってきたことを検出
  2. ロボットの軌跡と地図 (ランドマーク位置) の修正
     ループが閉じるように, 軌跡と地図の双方を修正 (辻褄を合わせる)

ループ閉じ込み

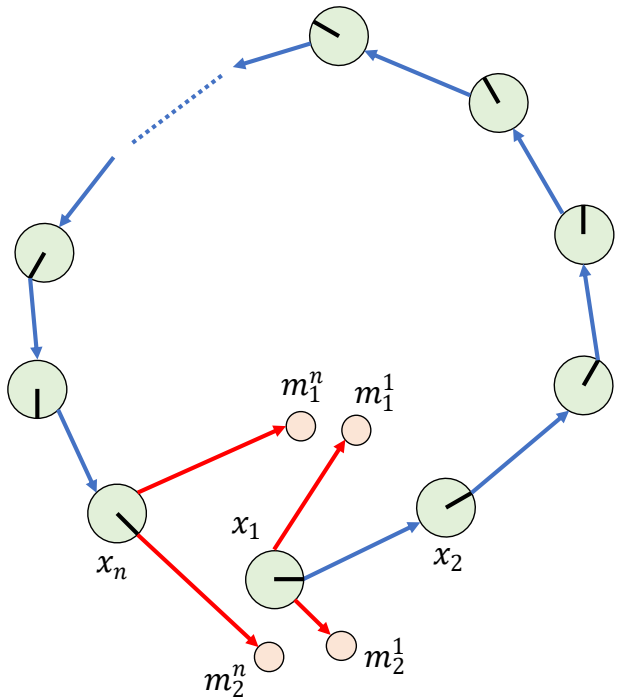
- ループ検出 [16]
  - x_n において，x_1 のときと同じランドマークを複数観測した



ループ閉じ込み

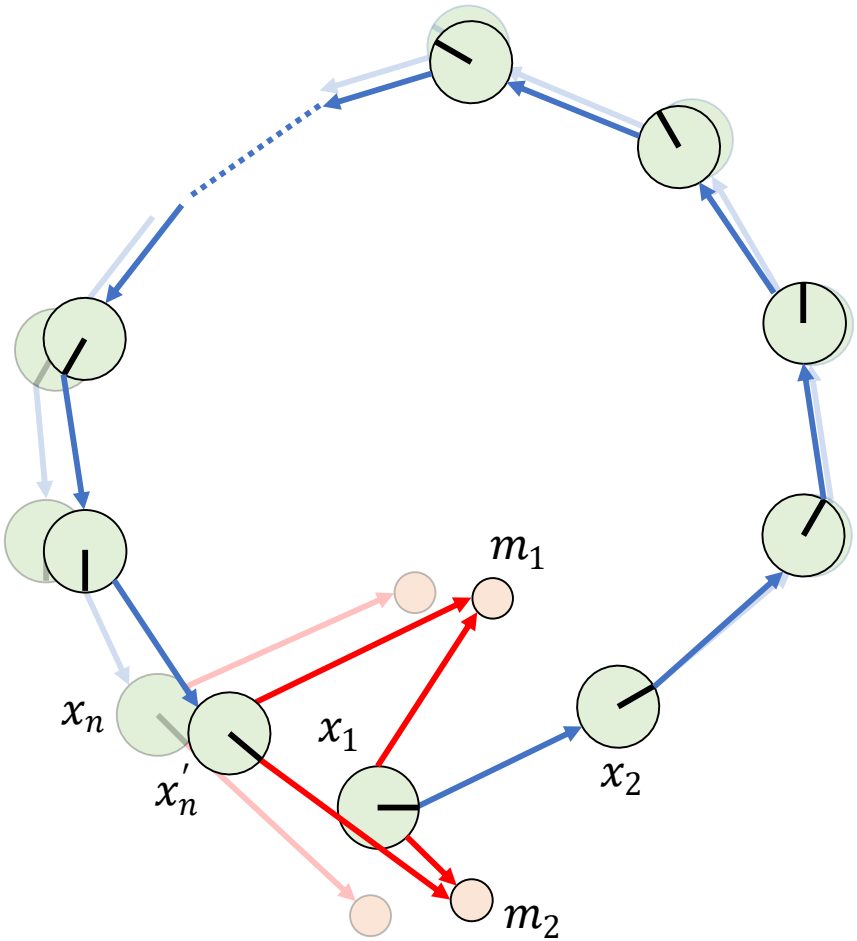
- ループ検出 [16]
  - x_n において，x_1 のときと同じランドマークを複数観測した
  - x_n は累積誤差の影響を受けている

    $\Rightarrow$ ランドマークの位置が重ならない $(m_1^1 \neq m_1^n, m_2^1 \neq m_2^n)$
  - ランドマークが重なり合うように，位置 x_n を修正して，x_n' を得る



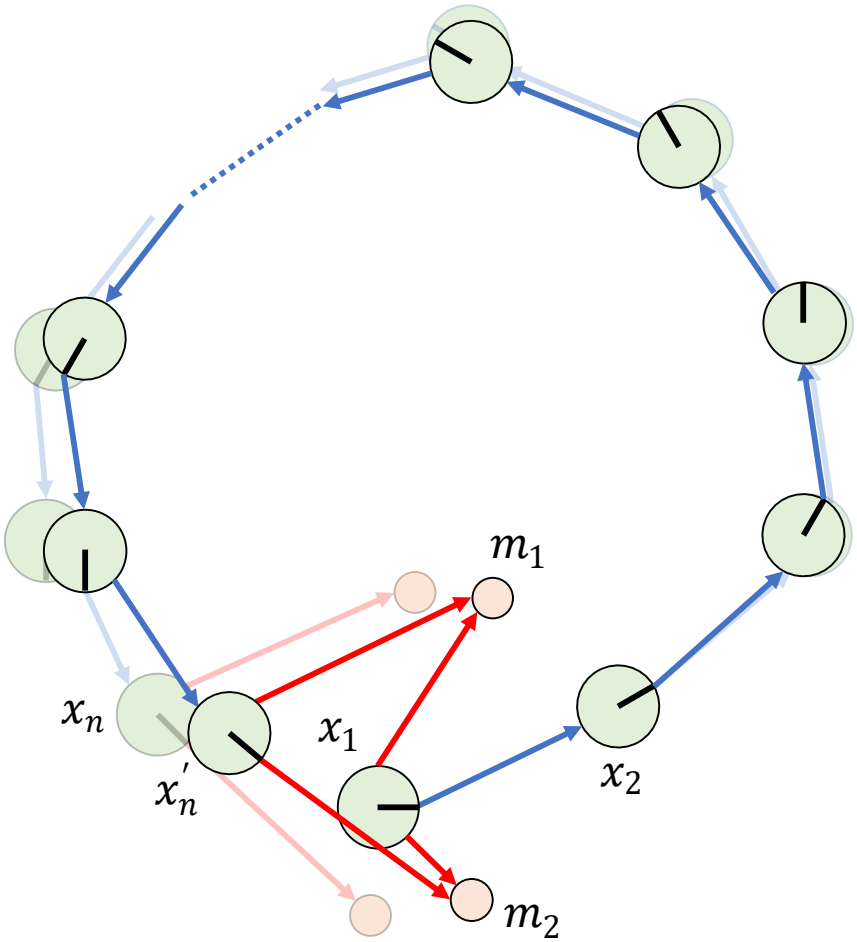
ループ閉じ込み

- ロボットの軌跡と地図 (ランドマーク位置) の修正 [16]
  - 修正した x'_n に合わせて，ロボットの軌跡と地図を修正



ループ閉じ込み

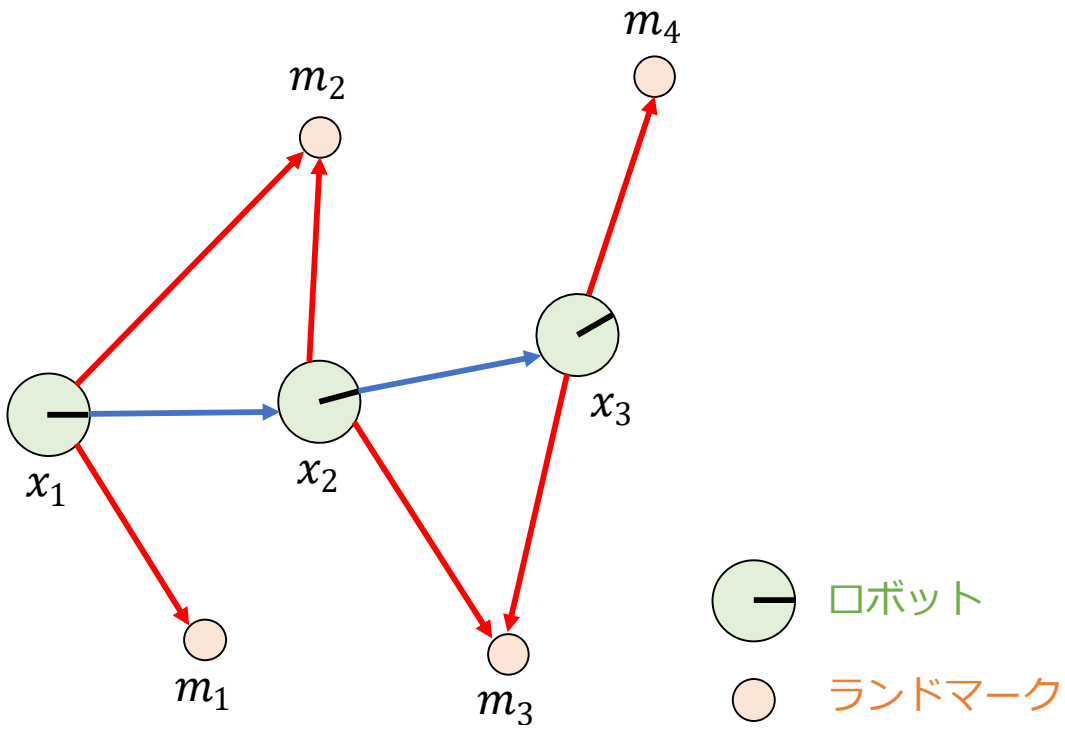
- ロボットの軌跡と地図 (ランドマーク位置) の修正 [16]
  - 軌跡と地図全体が修正される ⇒ 累積誤差が一気に解消される



目次

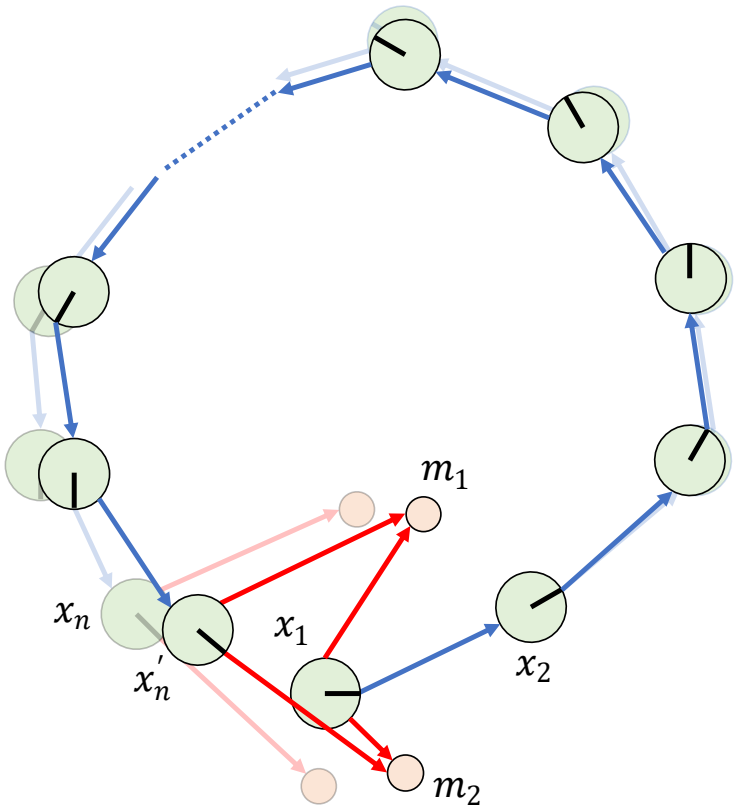
逐次処理と一括処理

- 逐次処理 [16]
  - リアルタイム処理 (次のセンサデータが来るまでに完了すべき)
  - 制御の反映と，スキャンマッチングによる姿勢の更新
  - 最新の (少量の) スキャンデータを繋ぎ合わせて地図を拡張
  - 局所的には正確な地図が作成できる



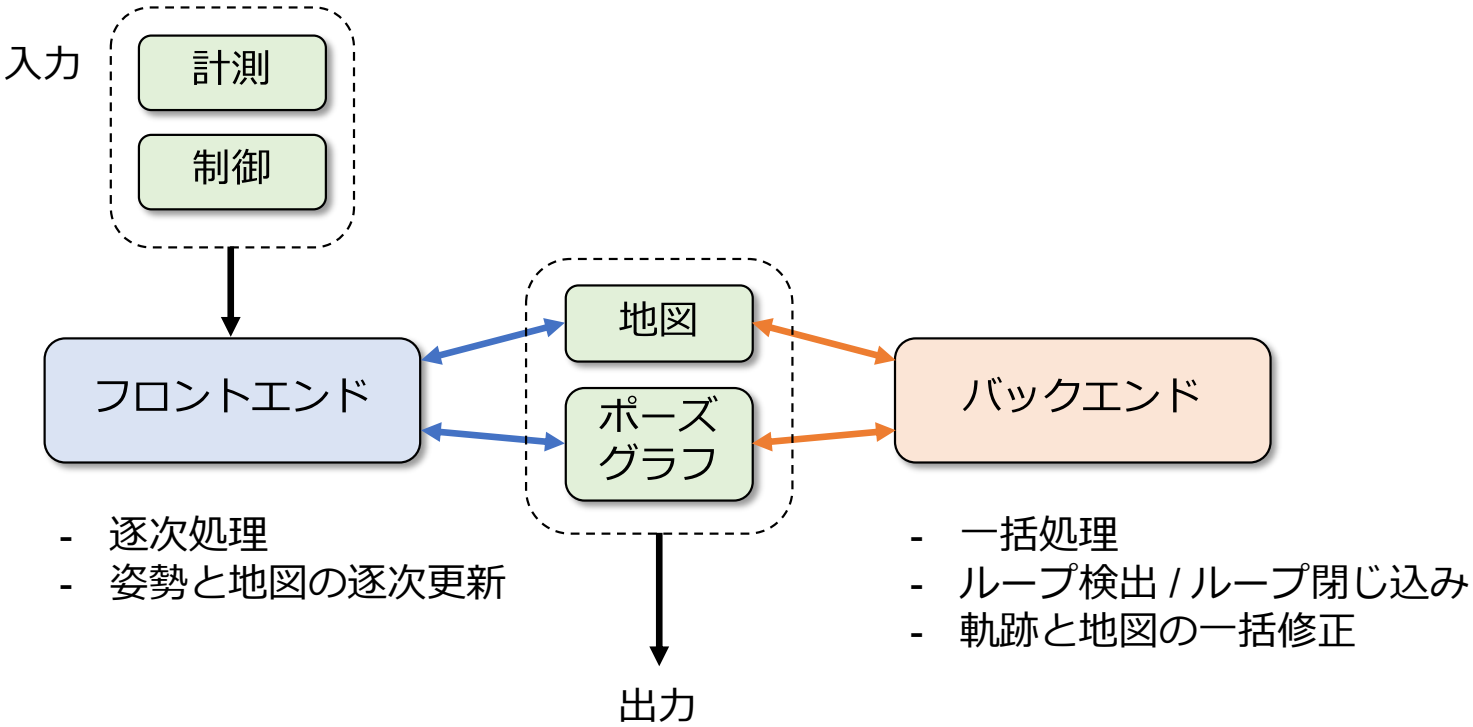
逐次処理と一括処理

- 一括処理 [16]
  - オフライン処理 / 最適化問題を解く
  - 全てのセンサデータを使って, 軌跡と地図を修正
  - 整合性の取れた, 正確な地図を作成できる



逐次処理と一括処理

- 逐次処理と一括処理の組み合わせ [16]
  - マルチスレッドによる実行 (役割分担)
  - フロントエンド: 逐次処理 (ローカルな処理, グラフの構築)
  - バックエンド: 一括処理 (グローバルな処理, グラフの最適化)



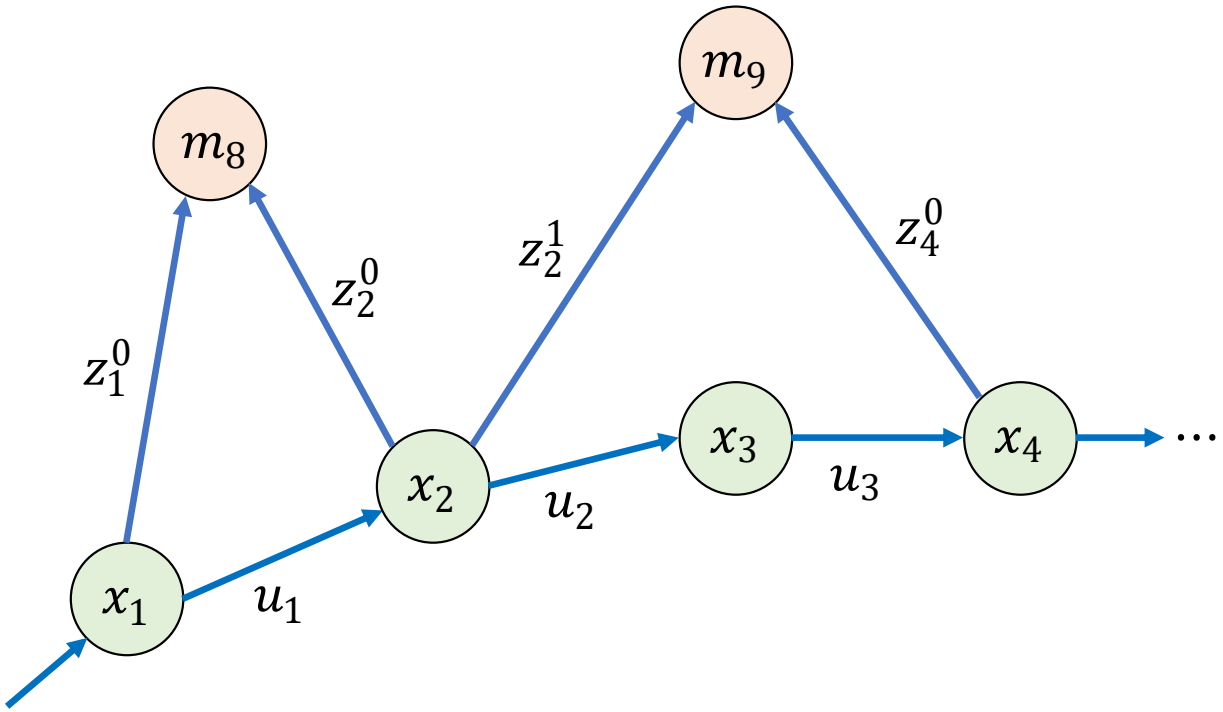
まとめ

- SLAM: 局所的な SLAM と大域的な SLAM から構成
- 局所的な SLAM
  - 姿勢の更新: 制御の反映と, スキャンマッチング
  - 地図の更新: 現在の姿勢の下で, スキャンデータを地図に追加
  - スキャンマッチング: 地図とスキャンデータ (計測) の重ね合わせ
- 大域的な SLAM
  - ループ検出
  - ループ閉じ込み
  - ロボットの軌跡と地図の一括修正

目次

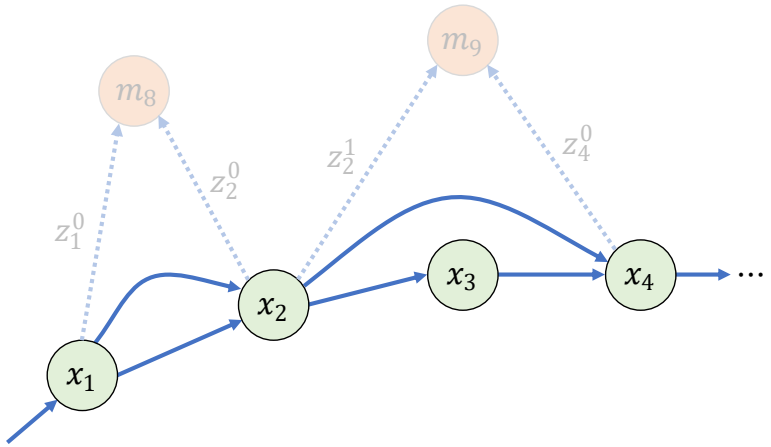
グラフベース SLAM とは

- グラフを構築する SLAM [12, 5, 16, 17]
  - ノード: 各時刻におけるロボットの姿勢 / ランドマークの位置
  - エッジ: 計測結果 (ノード間の相対姿勢として得られる)



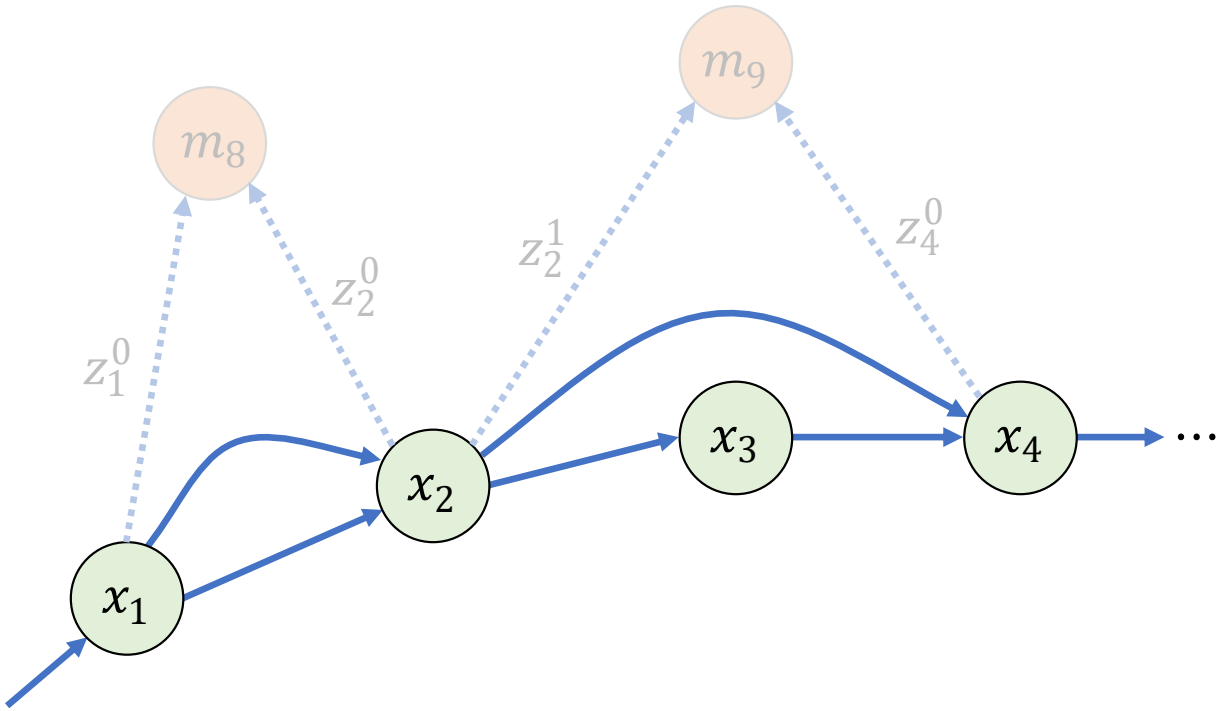
グラフベース SLAM とは

- グラフを構築する SLAM [12, 5, 16, 17]
  - 先程のグラフは, 姿勢とランドマーク位置 (地図) をノードとしてもつ
    ⇒ 地図を構成するランドマーク数は, 大規模になり得る (数万から数億)
    ⇒ ノードの数は, 最適化問題における変数の個数に直結
    ⇒ ノードの数が多く, 計算量が膨大になる
  - グラフを簡略化し, ロボットの姿勢のみをノードとして持たせる
    ⇒ これをポーズグラフという (計算量を削減できる)



グラフベース SLAM とは

- ポーズグラフ [16]
  - ノード: 各時刻におけるロボットの姿勢 x_t
  - エッジ: ノード間の拘束
  - 拘束には, 計測やループに関する情報が埋め込まれている



グラフベース SLAM とは

- ポーズグラフによる SLAM の流れ
  1. 計測やループ検出などから得た情報を基に，ポーズグラフを構築
  2. ポーズグラフを，最適化問題に変換
  3. 最適化問題を解き，ポーズグラフを最適化
  4. 最適化されたポーズグラフを使って，ロボットの軌跡と地図を修正

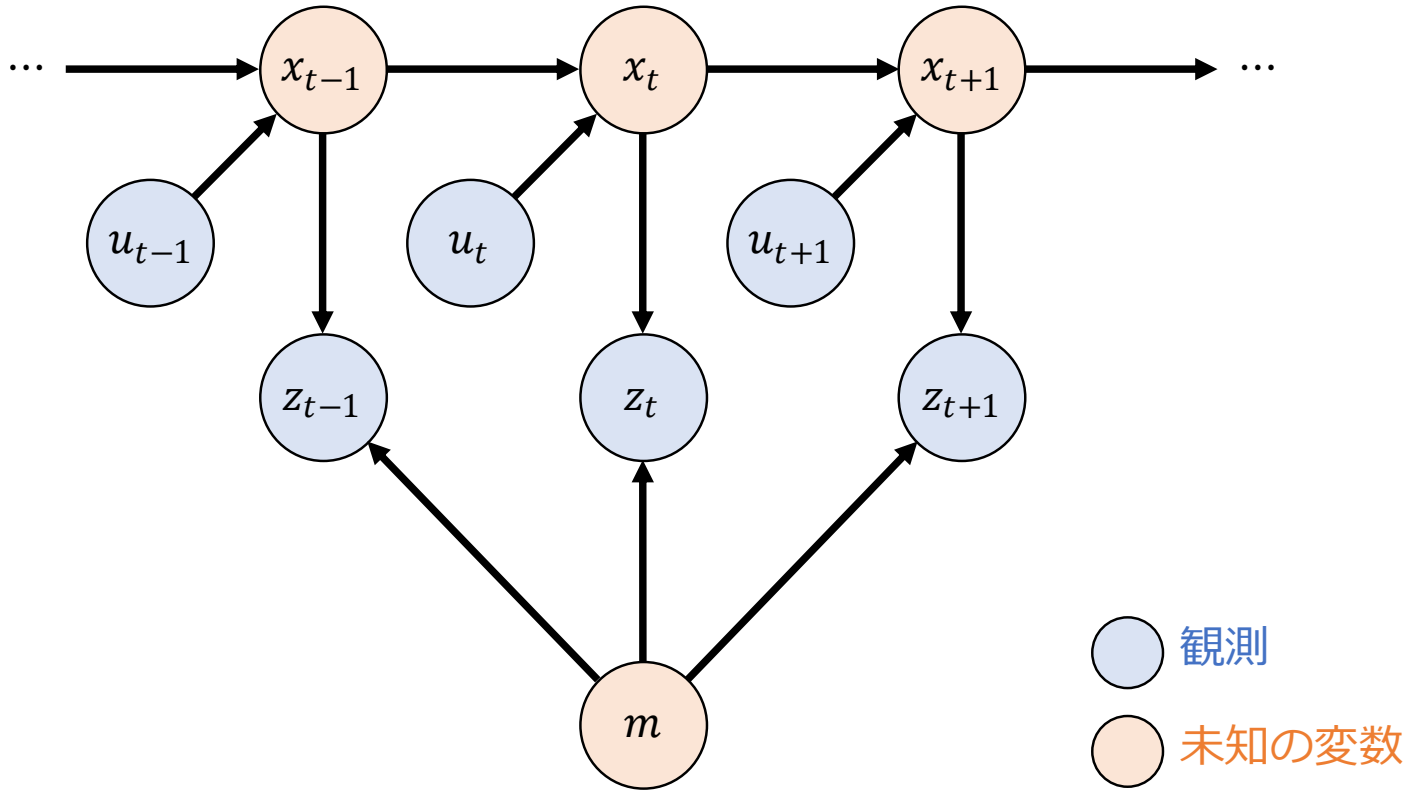
- 課題
  - グラフベース SLAM の定式化
  - ポーズグラフを構築する方法
  - 最適化問題を構成する方法
  - 最適化問題を解く方法

目次

目次

グラフベース SLAM の定式化

- グラフベース SLAM は, 完全 SLAM 問題を解く [5, 16]
  - ロボットの軌跡 $x_{1:t}$ と地図 m を計算 (軌跡: 全時刻における姿勢)
  - 過去から現在に至るまでの, 全ての制御 $u_{0:t}$, 計測 $z_{0:t}$ を利用



グラフベース SLAM の定式化

- グラフベース SLAM は, 完全 SLAM 問題を解く

- 完全 SLAM 問題 [17]
  - 下記の確率密度を最大化する, ロボットの軌跡 $x_{1:t}$ と地図 m を計算
  - 過去から現在に至るまでの, 全ての制御 $u_{0:t}$, 計測 $z_{0:t}$ を利用

$$x_{0:t}^*, m^* = \underset{x_{0:t}, m}{\arg\max}\ p(x_{0:t}, m \mid \widehat{x}_0, u_{0:t}, z_{0:t}) \tag{4}$$

  - $x_0, \cdots, x_t$ の相対的な位置関係だけが分かる

    $\Rightarrow$ $x_0, \cdots, x_t$ は, 剛体変換に対して不変

    $\Rightarrow$ $x_{0:t}$ が一意に定まるためには, 姿勢のどれかを固定する必要

    $\Rightarrow$ 初期姿勢 x_0 を, $\widehat{x}_0$ に固定
  - 初期姿勢 x_0 は $\widehat{x}_0$ から殆ど変化しないが, 便宜上変数として扱う

グラフベース SLAM の定式化

- 完全 SLAM 問題の分割 [17]
  - $x^*_{0:t}, m^* = p(x_{0:t}, m \mid \widehat{x}_0, u_{0:t}, z_{0:t})$
  - 地図 m は大規模になる (数万から数億次元)
    $\Rightarrow$ 上記の問題を直接解くのは, 計算量の観点から困難
  - 完全 SLAM 問題を, 軌跡の推定と地図の推定に分割

$$p(x_{0:t}, m \mid \widehat{x}_0, u_{0:t}, z_{0:t}) = \underbrace{p(x_{0:t} \mid \widehat{x}_0, u_{0:t}, z_{0:t})}_{\text{軌跡の推定}} \underbrace{p(m \mid x_{0:t}, z_{0:t})}_{\text{地図の推定}} \tag{5}$$

  - 軌跡の推定問題を, ポーズ調整 (Pose Adjustment) という

$$x^*_{0:t} = \arg\max_{x_{0:t}} \; p(x_{0:t} \mid \widehat{x}_0, u_{0:t}, z_{0:t}) \tag{6}$$

  - ポーズ調整を行うことで, ポーズグラフを最適化

グラフベース SLAM の定式化

- 完全 SLAM 問題の分割 [17]
  - 完全 SLAM 問題を，軌跡の推定と地図の推定に分割
  - 軌跡の推定 (ポーズ調整)

$$x^*_{0:t} = \arg\max_{x_{0:t}} \; p(x_{0:t} \mid \widehat{x}_0, u_{0:t}, z_{0:t})$$

  - 地図の推定

$$m^* = \arg\max_{m} \; p(m \mid x_{0:t}, z_{0:t}) \tag{7}$$

  - 地図の推定の際は，ポーズ調整で得た軌跡 $x^*_{0:t}$ を確定値として扱う
    $\Rightarrow$ 地図は，確定値 $x^*_{0:t}$ に対して決定論的に計算される

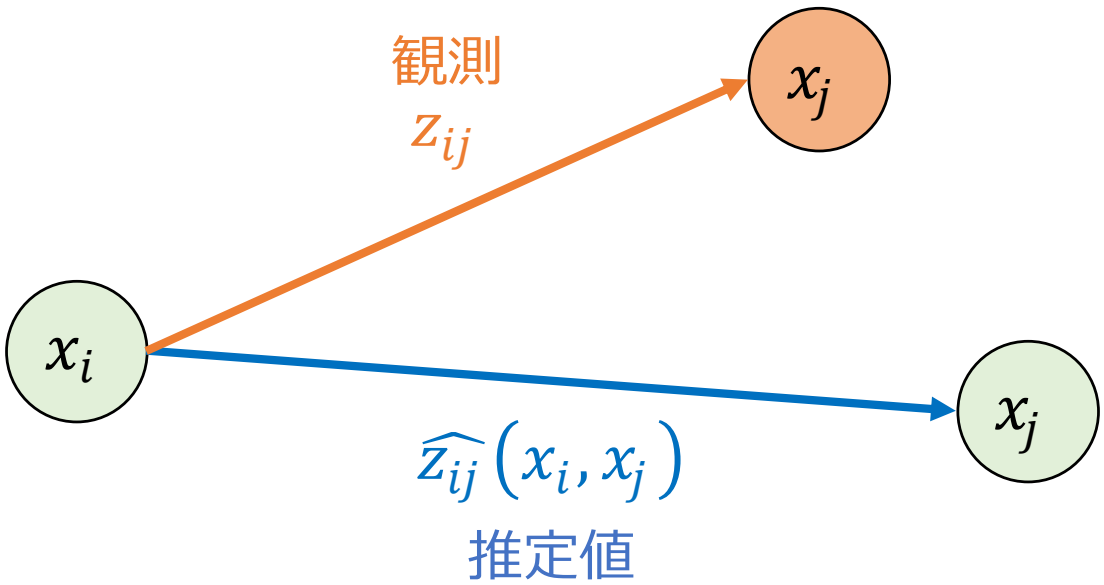
$$m^* \simeq m(x^*_{0:t}, z_{0:t}) \tag{8}$$

  - 地図の推定は考えないことにして，ポーズ調整に焦点を当てる

目次

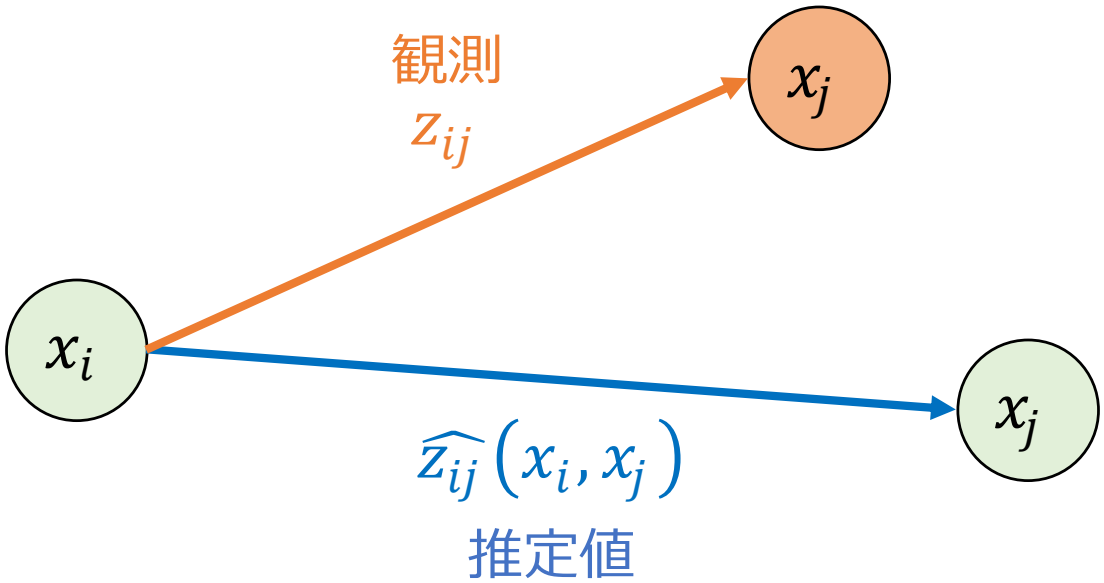
グラフベース SLAM の定式化

- ポーズグラフ [5]
  - ポーズグラフのエッジは, ノード間の拘束を表現する
  - ノードは, 各時刻でのロボットの姿勢である
  - 具体的に, エッジはどのような情報を持つか?
  - 時刻 i, j におけるノード x_i, x_j を結ぶエッジを考える



グラフベース SLAM の定式化

- ポーズグラフのエッジ [5]
  - 時刻 i, j におけるノード x_i, x_j を結ぶエッジを考える
  - 観測によって, 2 ノード間の相対姿勢 z_{ij} が得られている
    $\Leftarrow$ 観測とは, 計測によるスキャンマッチングや, ループ検出を指す



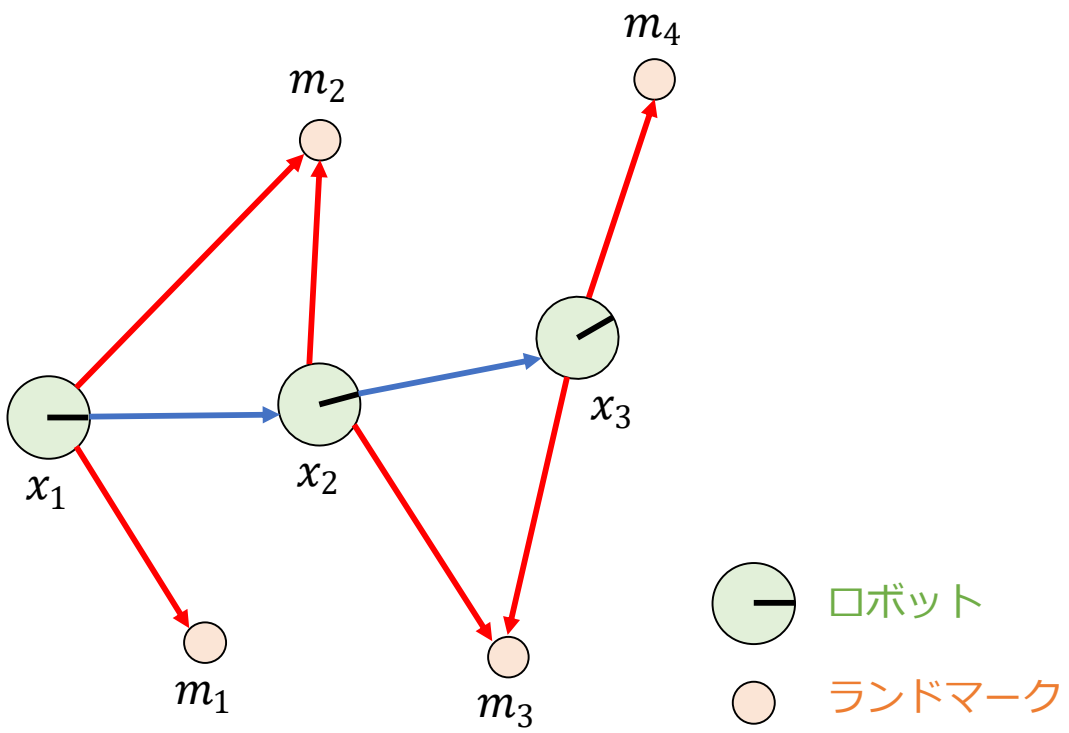
グラフベース SLAM の定式化

- ポーズグラフのエッジ [16]
  - 例: 逐次処理 (制御の反映と, スキャンマッチング)

    $\Rightarrow$ 以前の姿勢 x_{t-1} に制御 u_t を反映

    $\Rightarrow$ 計測 z_t と地図 m を重ね合わせて, 新たな姿勢 x_t を計算

    $\Rightarrow$ 隣接する時刻 $t-1, t$ における相対姿勢 $z_{t-1,t}$ が得られる

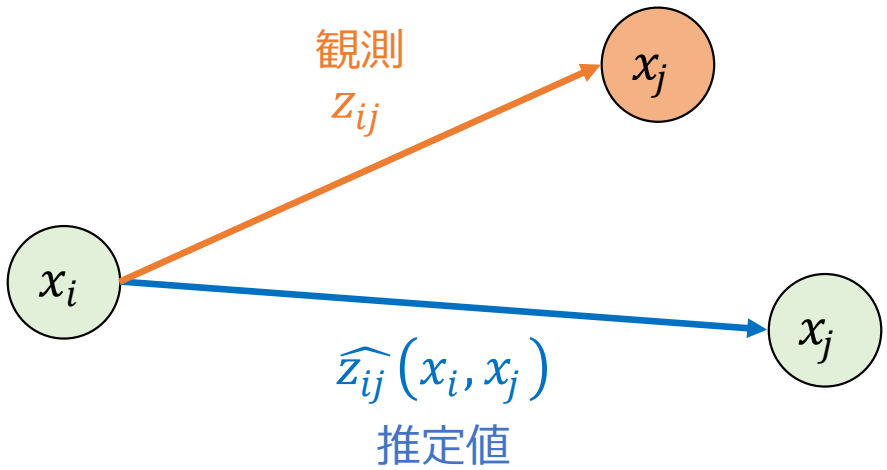


グラフベース SLAM の定式化

- ポーズグラフのエッジ [5]
  - 2 ノード間の相対姿勢は，姿勢 x_i, x_j から次のようにも計算できる
  - これを $\widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ とする

$$\widehat{z}_{ij}(x_i, x_j) = x_j \ominus x_i = \begin{bmatrix} \cos \xi_i^\theta & \sin \xi_i^\theta & 0 \\ -\sin \xi_i^\theta & \cos \xi_i^\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_j^x - \xi_i^x \\ \xi_j^y - \xi_i^y \\ \xi_j^\theta - \xi_i^\theta \end{bmatrix} \tag{9}$$

  - 但し，$x_i = \left[\xi_i^x, \xi_i^y, \xi_i^\theta\right]^\top, x_j = \left[\xi_j^x, \xi_j^y, \xi_j^\theta\right]^\top$ である



グラフベース SLAM の定式化

- ポーズグラフのエッジ [5]
  - 観測により得られた相対姿勢 z_{ij} は，定数値
  - 相対姿勢 $\widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ は，変数 x_i, x_j から計算される
    $\Rightarrow \widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ は変数を含んでおり，最適化の前後で変化
  - 次の残差の最小化を考える

$$e_{ij}(x_i, x_j) = z_{ij} - \widehat{z}_{ij}(x_i, x_j) \tag{10}$$

  - 残差は，x_i, x_j についての関数 (観測で得た z_{ij} は定数)

グラフベース SLAM の定式化

- ポーズグラフのエッジ [17]
  - 次の残差の最小化を考える

$$e_{ij}(x_i, x_j) = z_{ij} - \widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$$

  - 誤差がなければ, 残差 $e_{ij}(x_i, x_j)$ は 0 になる
    $\Rightarrow$ 実際には, 誤差の影響で 0 にならない
  - 局所的には, あるエッジの残差を 0 にすればよい
    $\Rightarrow$ ノードを介して, 全てのエッジ (残差) が互いに影響し合う
    $\Rightarrow$ 大域的に (全てのエッジについて), 残差を考慮する必要

グラフベース SLAM の定式化

- 残差のモデル化 [5, 17]
  - 残差 $e_{ij}(x_i, x_j)$ の確率分布を，ガウス分布で表現

$$p(e_{ij}) = \mathcal{N}(e_{ij} \mid 0, \Sigma_{ij}) \tag{11}$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2} e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Sigma_{ij}^{-1} e_{ij}(x_i, x_j)\right\} \tag{12}$$

  - 平均 0，共分散 Σ_{ij} のガウス分布
  - 共分散 Σ_{ij} は，何らかの方法で決める必要

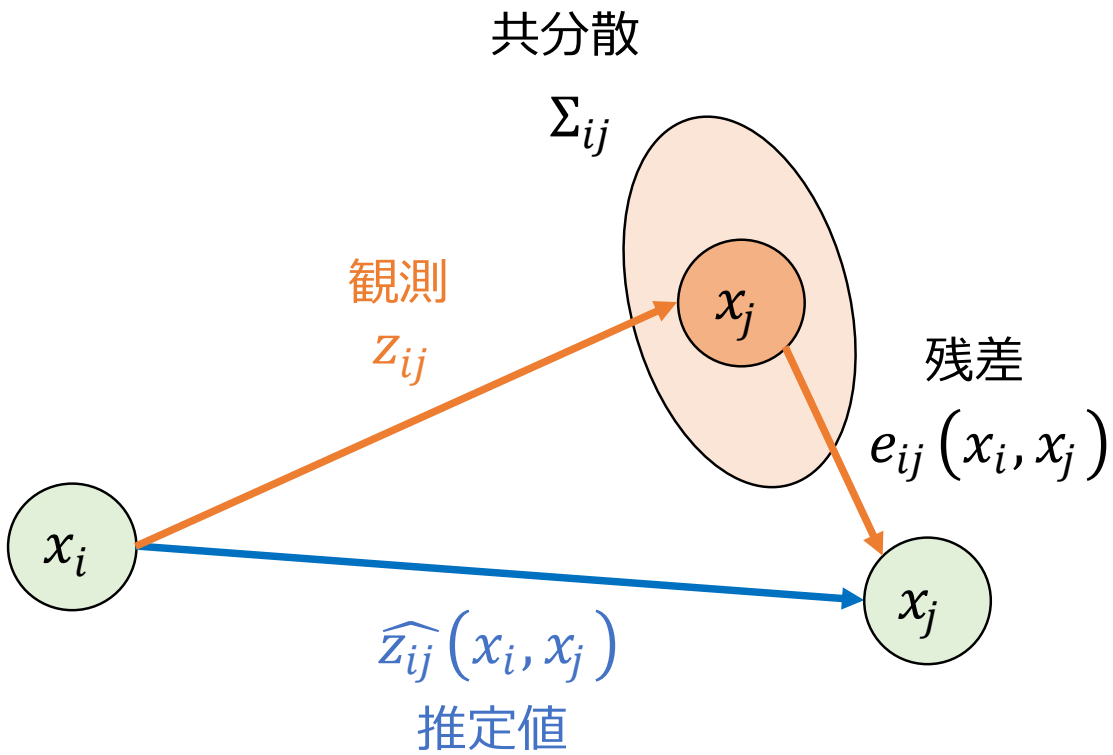
  - 観測結果 (z_{ij}) に誤差が少なく信頼できるなら，Σ_{ij} を小さく設定
    $\Rightarrow$ 残差 e_{ij} が大きくなると，$p(e_{ij})$ は急激に減少
    $\Rightarrow$ ノード x_i, x_j は，観測結果 z_{ij} に従おうとする

  - $p(e_{ij})$ は，ノード i, j を結ぶエッジの整合性を表す

グラフベース SLAM の定式化

- 残差のモデル化 [5]
  - 残差 $e_{ij}(x_i, x_j) = z_{ij} - \hat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ の確率分布

$$p(e_{ij}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2} e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Sigma_{ij}^{-1} e_{ij}(x_i, x_j)\right\}$$



グラフベース SLAM の定式化

- まとめ
  - 各エッジに対して，次の残差を最小化

$$e_{ij}(x_i, x_j) = z_{ij} - \widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$$

  - z_{ij}: 観測によって得られた，ノード i, j 間の相対姿勢 (定数)
  - $\widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$: 最適化によって推定される相対姿勢 ($x_i, x_j$ は変数)

  - 残差の最小化は，次のガウス分布の最大化に相当

$$p(e_{ij}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2} e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Sigma_{ij}^{-1} e_{ij}(x_i, x_j)\right\}$$

  - 各エッジは，観測による相対姿勢 z_{ij} と，共分散 Σ_{ij}^{-1} を保持する

目次

グラフベース SLAM の定式化

- ポーズ調整 [17]
  - 以下の関数 $f(x_{0:t})$ を，軌跡 $x_{0:t}$(全ノードの姿勢) について最大化

$$f(x_{0:t}) = \prod_{(i,j)\in\mathcal{C}} p(e_{ij}) \tag{12}$$

$$\propto \prod_{(i,j)\in\mathcal{C}} \exp\left\{-\frac{1}{2} e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Sigma_{ij}^{-1} e_{ij}(x_i, x_j)\right\} \tag{13}$$

  - 関数 $f(x_{0:t})$ は，全エッジに対する確率密度 $p(e_{ij})$ の積
  - $\mathcal{C}$ は，ポーズグラフ内の全てのエッジ (i, j) の集合
    $\Leftarrow$ 各エッジを，両端のノードのインデックス (i, j) で表現

グラフベース SLAM の定式化

- 初期姿勢 x_0 の固定 [17]
  - 以下の関数を，全姿勢 $x_{0:t}$ について最大化

$$f(x_{0:t}) \propto \prod_{(i,j)\in\mathcal{C}} \exp\left\{-\frac{1}{2} e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Sigma_{ij}^{-1} e_{ij}(x_i, x_j)\right\}$$

  - 初期姿勢 x_0 を，$\widehat{x}_0$ に固定する必要があった
  - 以下の $p_0(x_0)$ を，平均が $\widehat{x}_0$ で，分散が非常に小さなガウス分布とする

$$p_0(x_0) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_0 - \widehat{x}_0\right)^\top \Sigma_0^{-1}\left(x_0 - \widehat{x}_0\right)\right\} \tag{14}$$

  - 共分散 Σ_0 は対角行列で，各対角要素は非常に小さな値をもつ
    $\Rightarrow \Sigma_0 = \varepsilon I,\ \varepsilon \ll 1$ (I は単位行列)
    $\Rightarrow x_0$ の x, y, θ 成分に加わる誤差は，互いに独立とする

グラフベース SLAM の定式化

- 初期姿勢 x_0 の固定 [17]
  - 先程の関数 $f(x_{0:t})$ に，$p_0(x_0)$ を追加

$$
\begin{aligned}
& f(x_{0:t}) \\
\propto \quad & p_0(x_0) \prod_{(i,j)\in\mathcal{C}} p(e_{ij}) && (15) \\
\propto \quad & p_0(x_0) \prod_{(i,j)\in\mathcal{C}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Sigma_{ij}^{-1} e_{ij}(x_i, x_j) \right\} && (16)
\end{aligned}
$$

  - 初期姿勢 x_0 は，$\widehat{x}_0$ に固定する必要がある
    $\Leftarrow$ 軌跡 $x_{0:t}$ は，x, y, θ 方向に平行移動させても不変
  - 上記の $f(x_{0:t})$ は，x_0 が $\widehat{x}_0$ から少しでもずれると，急激に減少
    $\Rightarrow$ x_0 を $\widehat{x}_0$ に固定しながら，$x_{1:t}$ を調整できる

グラフベース SLAM の定式化

- 情報行列 Ω による表記 [17]
  - 共分散行列の逆行列 Σ^{-1} を，精度行列や情報行列 Ω という
  - これ以降，情報行列 Ω を用いて表記
  - x_0 の確率分布 $(\Omega_0 = \Sigma_0^{-1},\ \Omega_0 = \varepsilon^{-1} I,\ \varepsilon \ll 1)$

$$p_0(x_0) \propto \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(x_0 - \widehat{x}_0\right)^\top \Omega_0 \left(x_0 - \widehat{x}_0\right) \right\} \tag{17}$$

  - Ω_0 の各対角成分は，十分に大きな値
  - グラフベース SLAM で解く問題 $(\Omega_{ij} = \Sigma_{ij}^{-1})$

$$\begin{aligned} f(x_{0:t}) &\propto p_0(x_0) \prod_{(i,j)\in\mathcal{C}} p(e_{ij}) \\ &\propto p_0(x_0) \prod_{(i,j)\in\mathcal{C}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} e_{ij}^\top \Omega_{ij} e_{ij} \right\} \end{aligned} \tag{18}$$

グラフベース SLAM の定式化

- 負の対数の最大化 [17]
  - $f(x_{0:t})$ は指数関数であるから，単調増加
    $\Rightarrow$ 対数 $\ln f(x_{0:t})$ を最大化しても，同じ解 $x_{0:t}$ が得られる

$$
\begin{aligned}
& \ln f(x_{0:t}) \\
= \quad & \eta + \ln p_0(x_0) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} \ln p(e_{ij}) \\
= \quad & \eta - \frac{1}{2}\left(x_0 - \widehat{x}_0\right)^\top \Omega_0 \left(x_0 - \widehat{x}_0\right) - \\
& \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} \frac{1}{2} e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(x_i, x_j)
\end{aligned}
$$

  - 関数 $f(x_{0:t})$ の最大化は，$\ln f(x_{0:t})$ の最大化と等価
    $\Rightarrow$ $\ln f(x_{0:t})$ の定数 η を除去し，符号を反転させて，次の結果を得る

グラフベース SLAM の定式化

- ポーズ調整 [5, 17]
  - 結局, $f(x_{0:t})$ の最大化は, 次の関数 $F(x_{0:t})$ の最小化に相当

$$F(x_{0:t}) = (x_0 - \widehat{x}_0)^\top \Omega_0 (x_0 - \widehat{x}_0) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(x_i, x_j) \tag{19}$$

  - 以上より, グラフベース SLAM が解くポーズ調整は, 次のように書ける

$$x^*_{0:t} = \arg\min_{x_{0:t}} F(x_{0:t}) \tag{20}$$

グラフベース SLAM の定式化

- ポーズ調整 [5]
  - 簡単のため, 各エッジに関する項を $F_{ij}(x_i, x_j)$ と書く

$$F_{ij}(x_i, x_j) = e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(x_i, x_j) \tag{21}$$

  - また, 初期姿勢 x_0 に関する項を $F_0(x_0)$ と書く

$$F_0(x_0) = (x_0 - \widehat{x}_0)^\top \Omega_0 (x_0 - \widehat{x}_0) \tag{22}$$

  - このとき, $F(x_{0:t})$ は次のようになる

$$F(x_{0:t}) = F_0(x_0) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} F_{ij}(x_i, x_j) \tag{23}$$

  - $F_{ij}(x_i, x_j), F_0(x_0)$ はマハラノビス距離の二乗
  - ポーズ調整は, 非線形最小二乗問題

    $\Leftarrow$ 残差 $e_{ij}(x_i, x_j) = z_{ij} - \widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ が, x_i, x_j について非線形

グラフベース SLAM の定式化

- ポーズ調整 [17]
  - ポーズ調整は，関数 $F(x_{0:t})$ の最小化であった

$$x^*_{0:t} = \arg\min_{x_{0:t}} F(x_{0:t})$$

  - 完全 SLAM 問題の観点からは，ポーズ調整は次のように記述した

$$x^*_{0:t} = \arg\max_{x_{0:t}} p(x_{0:t} \mid \widehat{x}_0, u_{0:t}, z_{0:t})$$

  - 両者は同じことを表しているはず
  - ここでは，両者の関係については考えない

目次

グラフベース SLAM の定式化

- ポーズ調整のまとめ
  - 目的関数 $F(x_{0:t})$ の最小化

$$x^*_{0:t} = \arg\min_{x_{0:t}} F(x_{0:t})$$

  - $x_{0:t}$ は，全時刻におけるロボットの姿勢 (軌跡)
  - $F(x_{0:t})$ は，ポーズグラフから構成できる

  - 各ノードが持つ情報: 姿勢 x_t
  - 各エッジが持つ情報: 観測による相対姿勢 z_{ij} と情報行列 Ω_{ij}
  - 各エッジについて，マハラノビス距離の二乗 $F_{ij}(x_i, x_j)$ を最小化

$$F_{ij}(x_i, x_j) = e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(x_i, x_j)$$

グラフベース SLAM の定式化

- ポーズ調整のまとめ
  - 各エッジが持つ情報: 観測による相対姿勢 z_{ij} と情報行列 Ω_{ij}
  - 各エッジについて, マハラノビス距離の二乗 $F_{ij}(x_i, x_j)$ を最小化

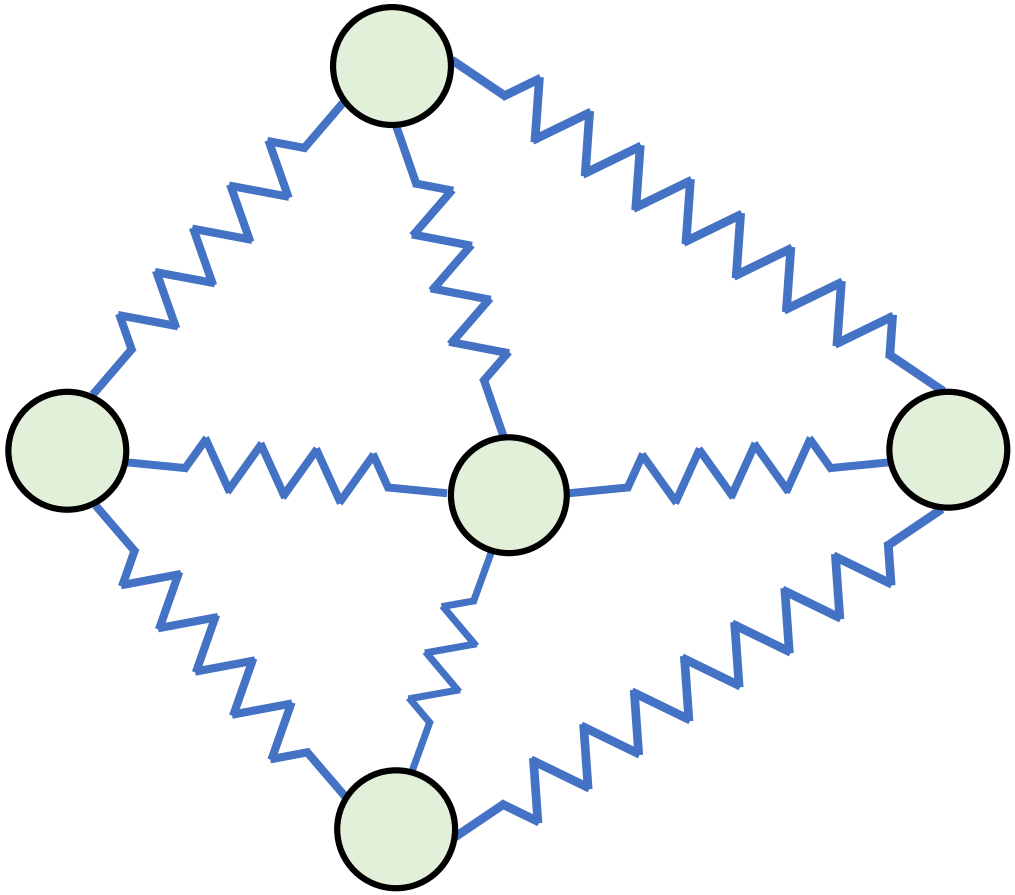
$$F_{ij}(x_i, x_j) = e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(x_i, x_j)$$

  - $e_{ij}(x_i, x_j) = z_{ij} - \hat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ は残差とよばれる
  - z_{ij} は, 観測によって得られる, x_i と x_j の相対姿勢 (定数)
    $\Leftarrow$ スキャンマッチングや, ループ検出によって得られる
  - $\hat{z}_{ij}$ は, ポーズ調整によって修正される, x_i と x_j の相対姿勢
    $\Leftarrow$ 変数 x_i, x_j の非線形な関数
    $\Leftarrow$ 変数 x_i, x_j はノードが表現する

グラフベース SLAM の定式化

- ポーズ調整のまとめ
  - ノードの姿勢は自在に変わるが, エッジのもつ情報 (拘束) は固定される

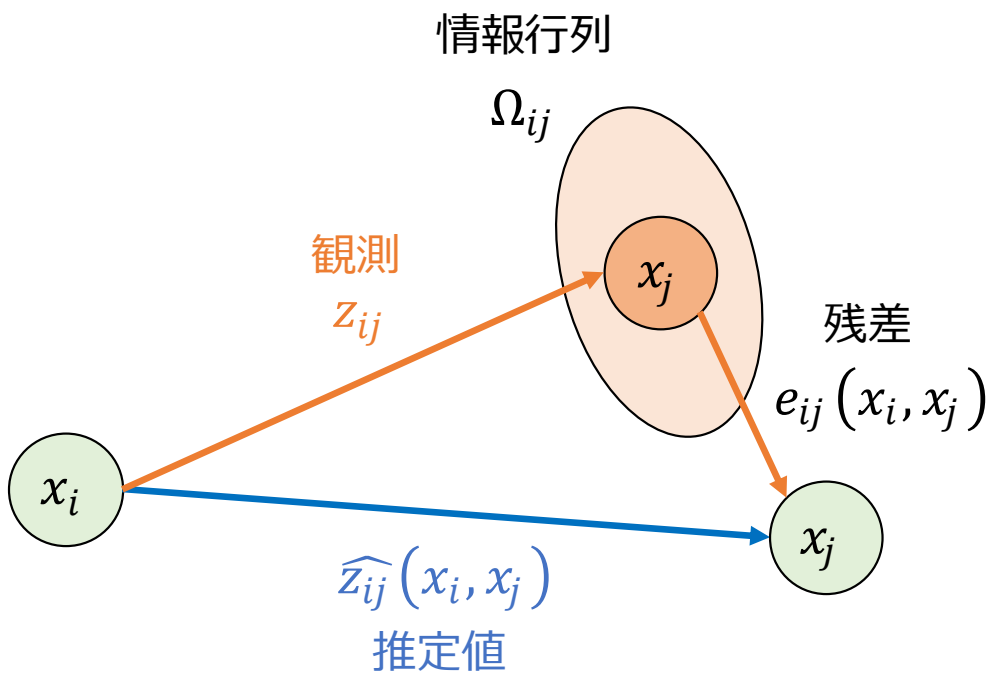
    $\Leftarrow$ バネで繋がれたおもりを, エネルギーが最小になるように動かす



目次

ポーズグラフの構築

- 相対姿勢の計算 [5, 16, 17]
  - ポーズグラフのエッジを，どのように作成するか?
  - 各エッジは，観測に基づく相対姿勢 z_{ij} と情報行列 Ω_{ij} を保持
  - 残差 $e_{ij}(x_i, x_j) = z_{ij} - \hat{z}_{ij}(x_i, x_j)$
  - 相対姿勢 z_{ij} は，観測 (計測やループ検出) によって得る



ポーズグラフの構築

- 共分散の計算
  - 各エッジは, 観測に基づく相対姿勢 z_{ij} と情報行列 Ω_{ij} を保持
  - 残差の共分散 $\Sigma_{ij} = \Omega_{ij}^{-1}$ も必要

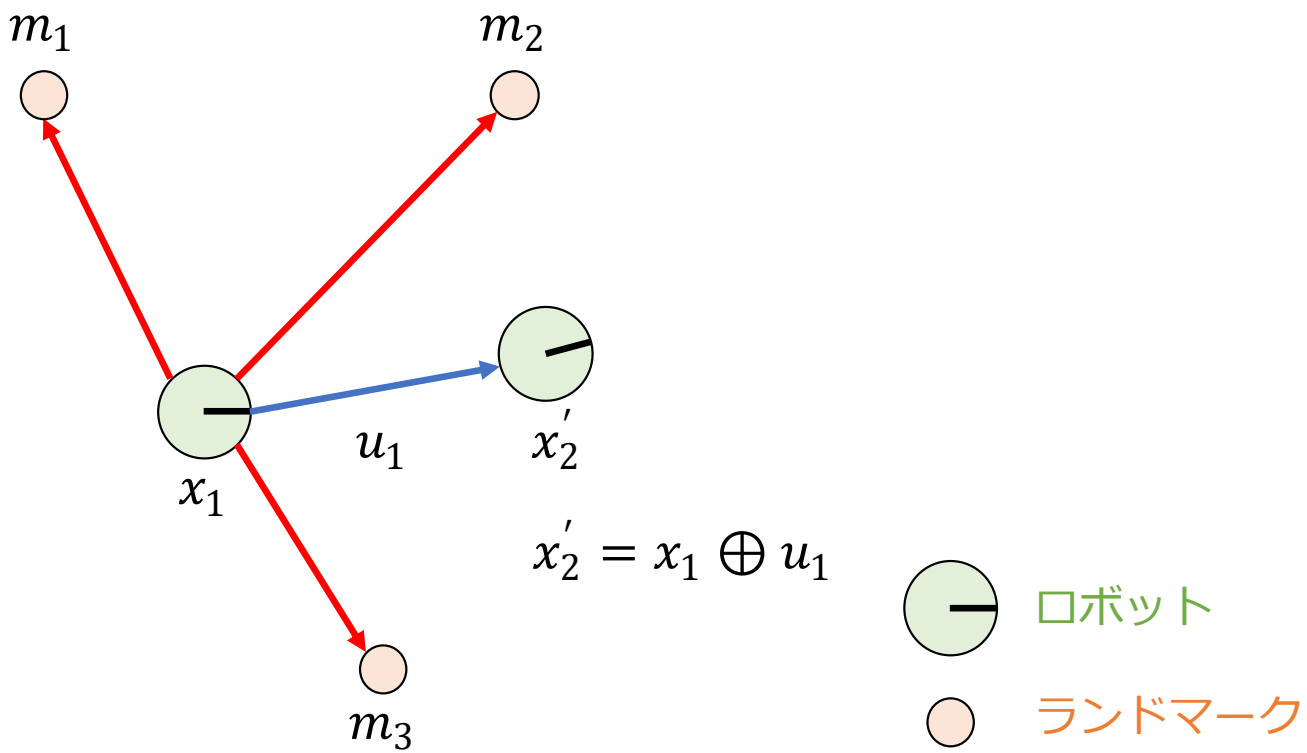
    $\Rightarrow$ 共分散をどのようにして求めるか?

    $\Rightarrow$ あまり詳しく知らないので, ここでは説明を省略
  - 計算例
    - 具体的な計算例 (解析的) [17]
    - 最適化ソルバで推定する [6]
    - スキャンマッチング (ICP) の誤差関数のヘッセ行列 [16, 2, 4]
    - スキャンマッチングによって得た姿勢の周囲でしらみつぶし [10]
    - 各スキャン点をガウス分布でモデル化 (NDT) [3] [9]
  - 観測によって得た相対姿勢 z_{ij} が信頼できるとき, 共分散 Σ_{ij} は小さい
  - ポーズグラフのエッジを作成する, 2 つの方法を説明

目次

ポーズグラフの構築

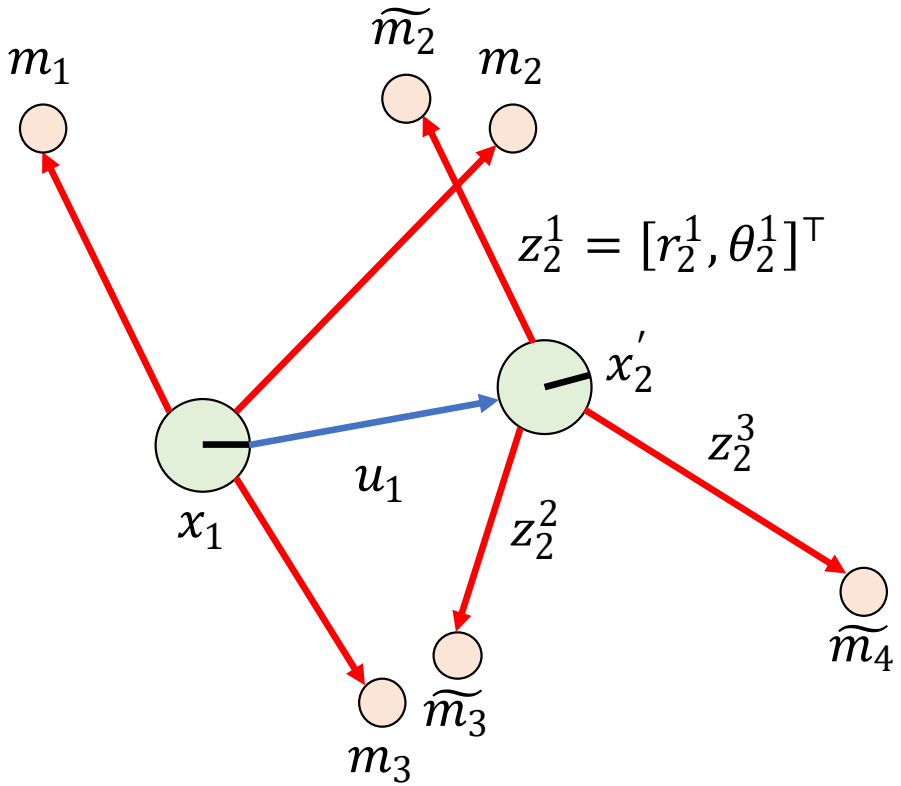
- 逐次的な SLAM によるエッジの作成 (制御の反映) [16]
  - 以下の図で, ロボットが x_1 から x_2 に移動する場合を考える
  - 制御 u_1 により, ロボットが x_1 から x_2' に移動
  - 地図 m には, 3 つのランドマーク m_1, m_2, m_3 が登録 (x_1 で観測)



ポーズグラフの構築

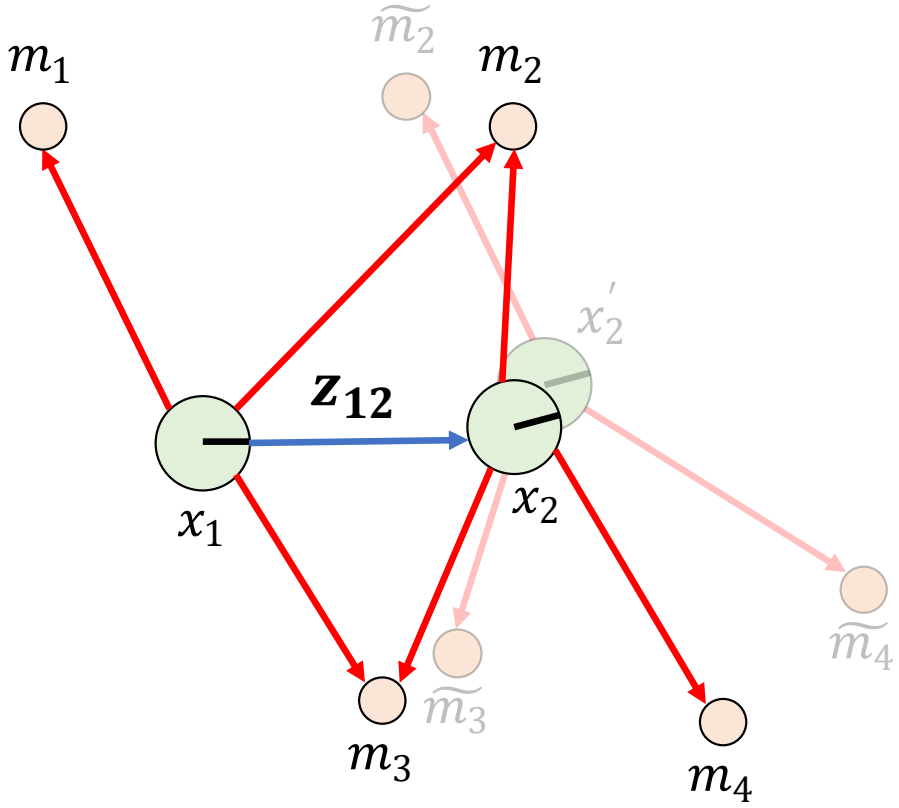
- 逐次的な SLAM によるエッジの作成 (スキャンマッチング) [16]
  - 時刻 $t = 2$ で, 3 つのランドマーク $\widetilde{m}_2, \widetilde{m}_3, \widetilde{m}_4$ を観測 (計測 z_t)
  - ランドマーク $2, 3$ は本来は同一の位置だが, 重なっていない

    $\Leftarrow$ 制御 u_t と計測 z_t に含まれる誤差のため $(m_2 \neq \widetilde{m}_2, m_3 \neq \widetilde{m}_3)$



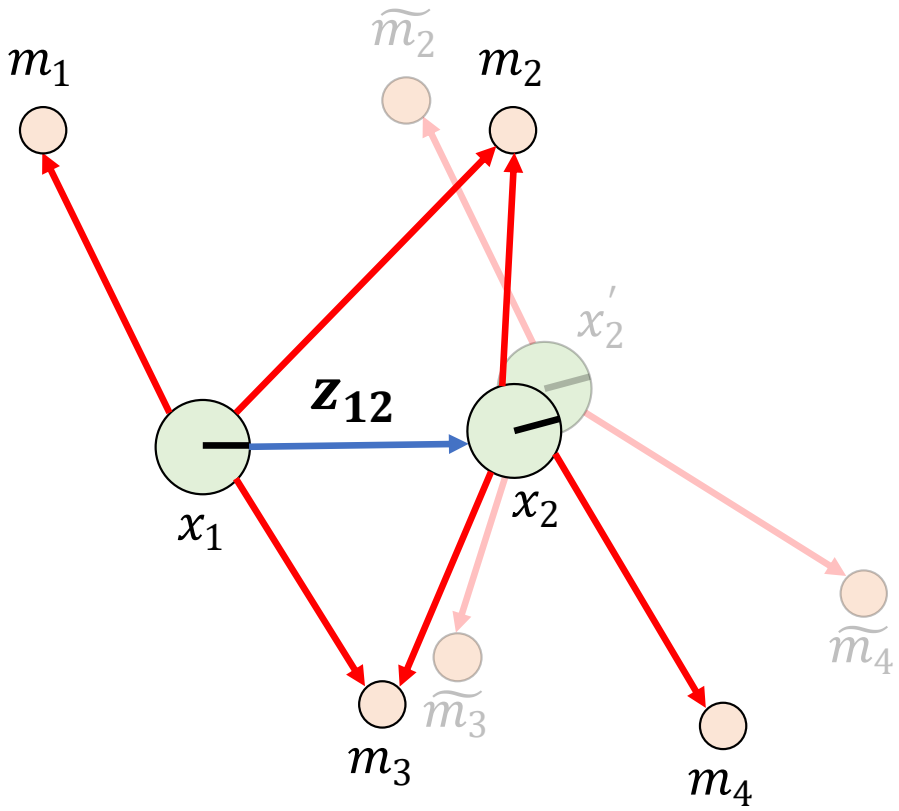
ポーズグラフの構築

- 逐次的な SLAM によるエッジの作成 (スキャンマッチング) [16]
  - ランドマークと地図の重ね合わせにより, 姿勢を改良 $(x_2' \to x_2)$
  - 2 つのランドマーク $\widetilde{m}_2, \widetilde{m}_3$ が, 地図に含まれる m_2, m_3 と重なる
  - 時刻 $t = 2$ における, 最終的な姿勢 x_2 が得られる



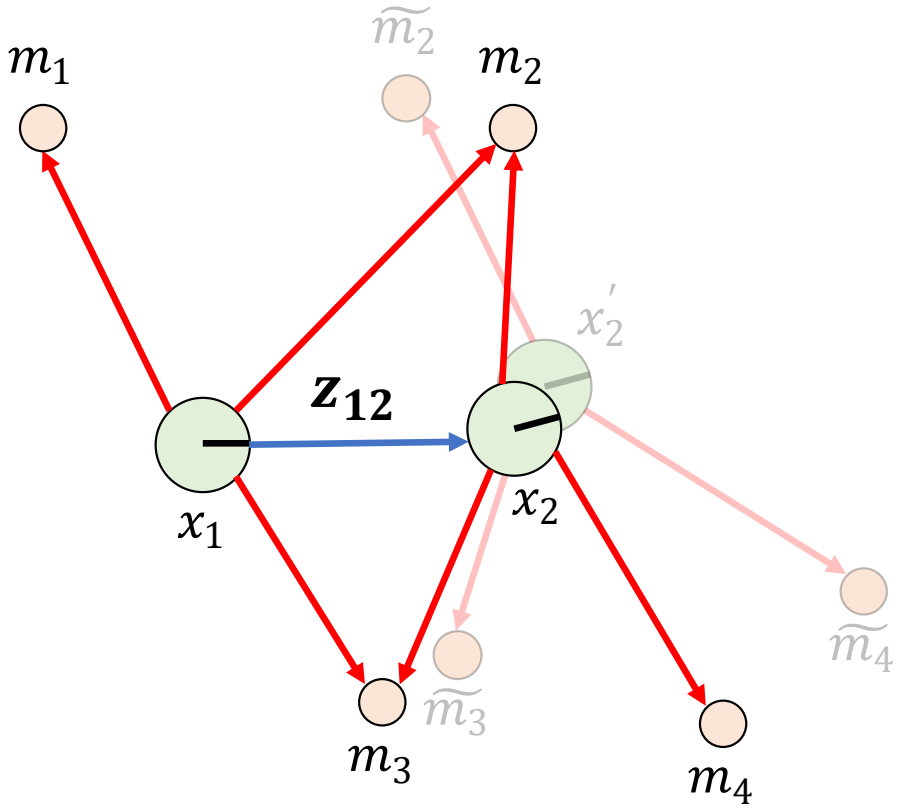
ポーズグラフの構築

- 逐次的な SLAM によるエッジの作成 (ノード追加) [16]
  - 時刻 $t = 2$ における, 最終的な姿勢 x_2 が得られる
  - 姿勢 x_2 を, ポーズグラフにノード x_2 として追加



ポーズグラフの構築

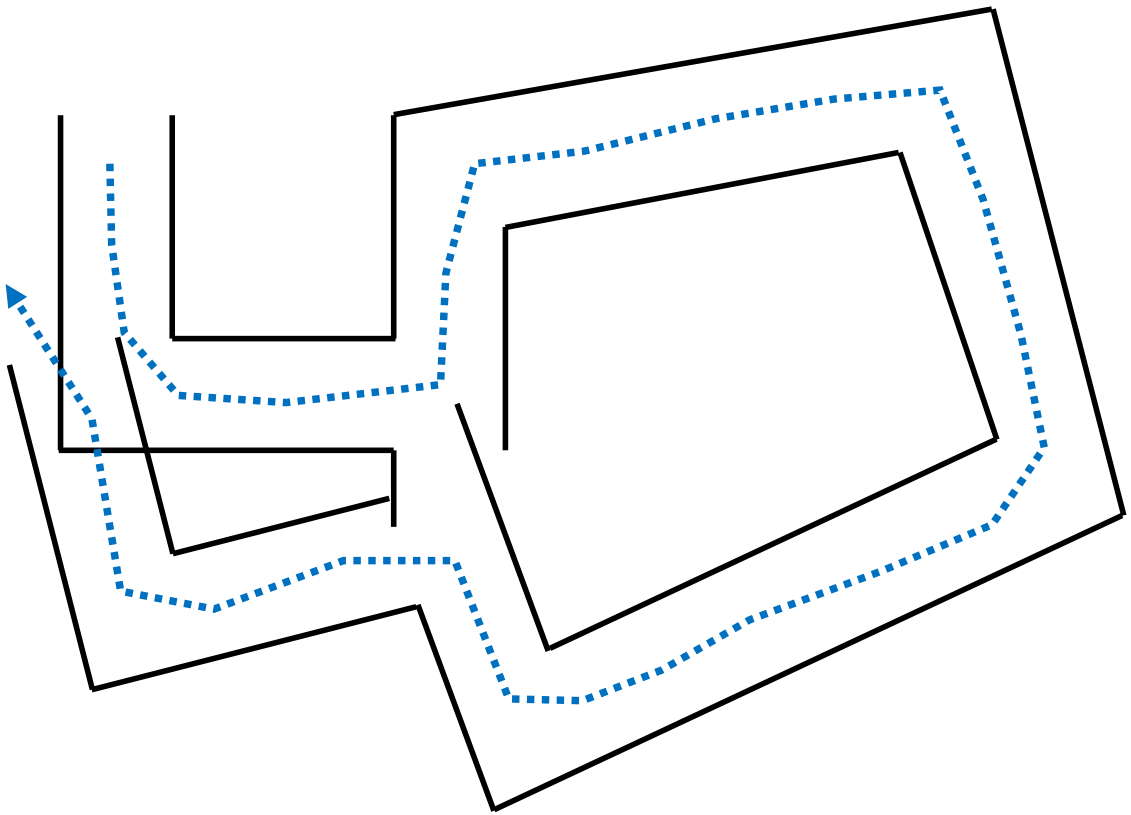
- 逐次的な SLAM によるエッジの作成 (エッジ追加) [16]
  - x_1 と x_2 との相対姿勢 $z_{12} = x_2 \ominus x_1$ が計算できる
  - 何らかの方法で, 共分散 Σ_{12} を得る (x_2 の不確実性を反映)
  - 相対姿勢 z_{12} と情報行列 $\Omega_{12} = \Sigma_{12}^{-1}$ を, ポーズグラフのエッジに追加



目次

ポーズグラフの構築

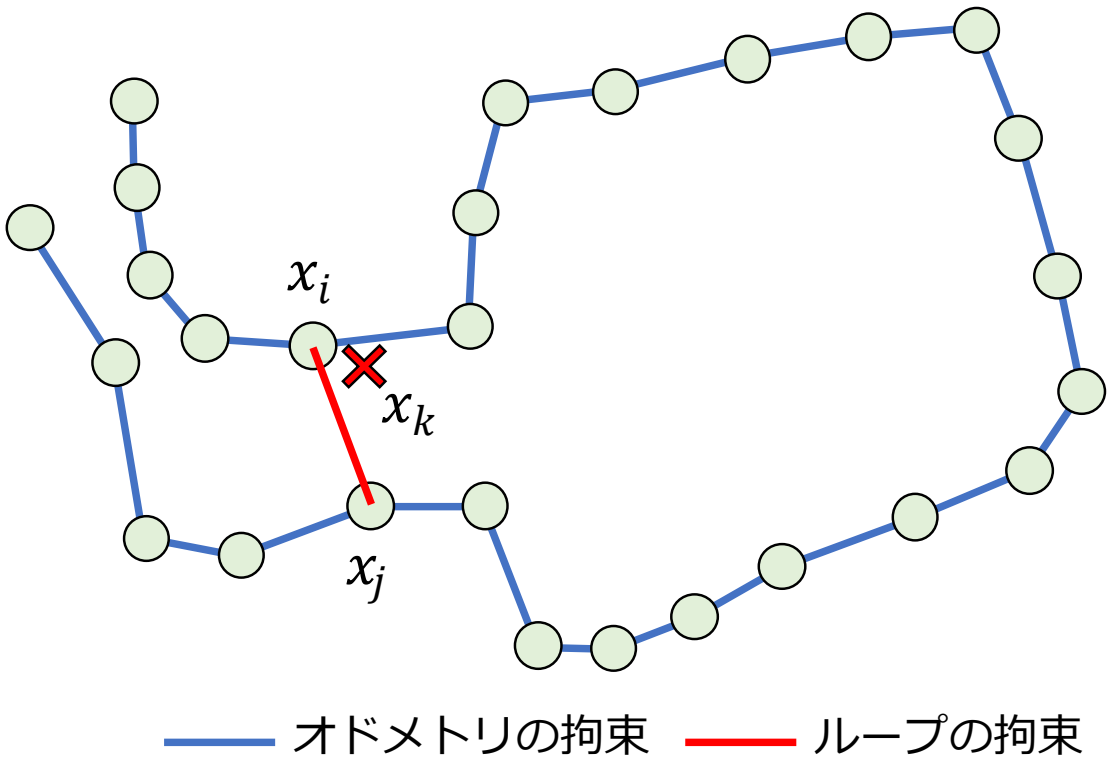
- ループ検出によるエッジの作成 [16]
  - 逐次的な SLAM だけでは, 誤差が累積する
  - 以前訪れた場所に戻ってきたのに, 地図上で重ならない
  - 地図上に, 同じ場所が複数出現する



ポーズグラフの構築

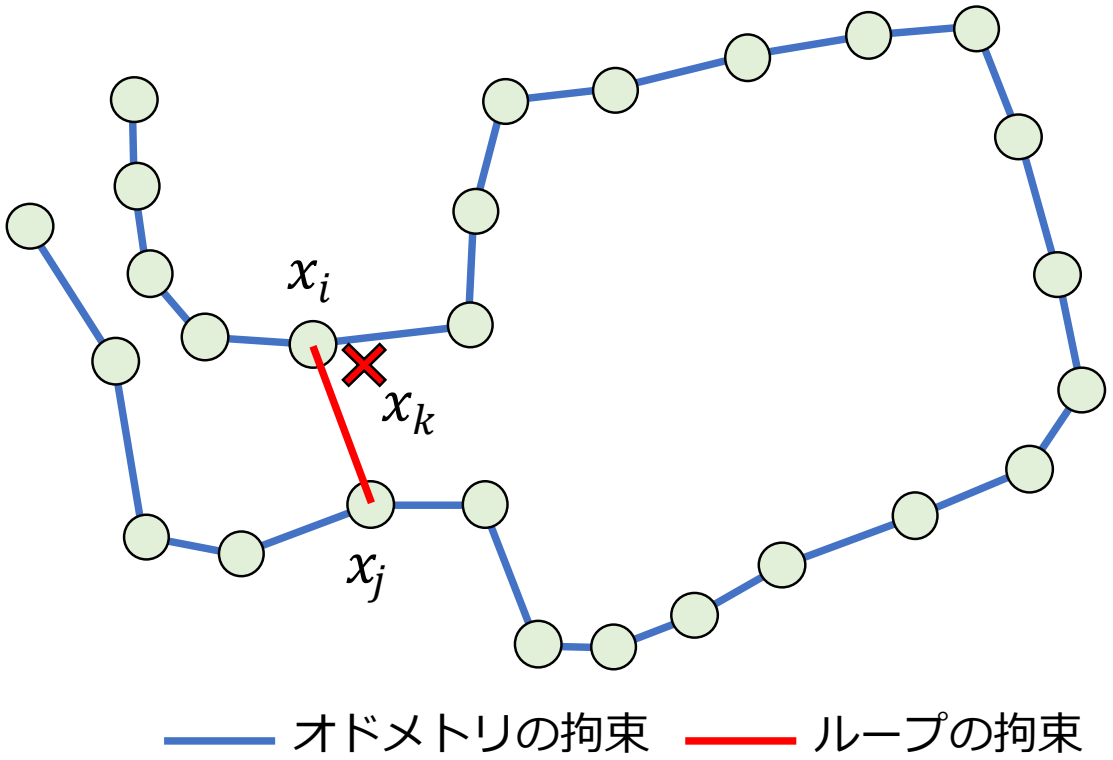
- ループ検出によるエッジの作成 (ループ検出) [16]
  - 何らかの方法で, ループを検出したとする
  - ノード x_j と対応する点を, ノード x_i を始点として探索

    $\Rightarrow$ x_j が, 地図上の x_k と対応することが判明



ポーズグラフの構築

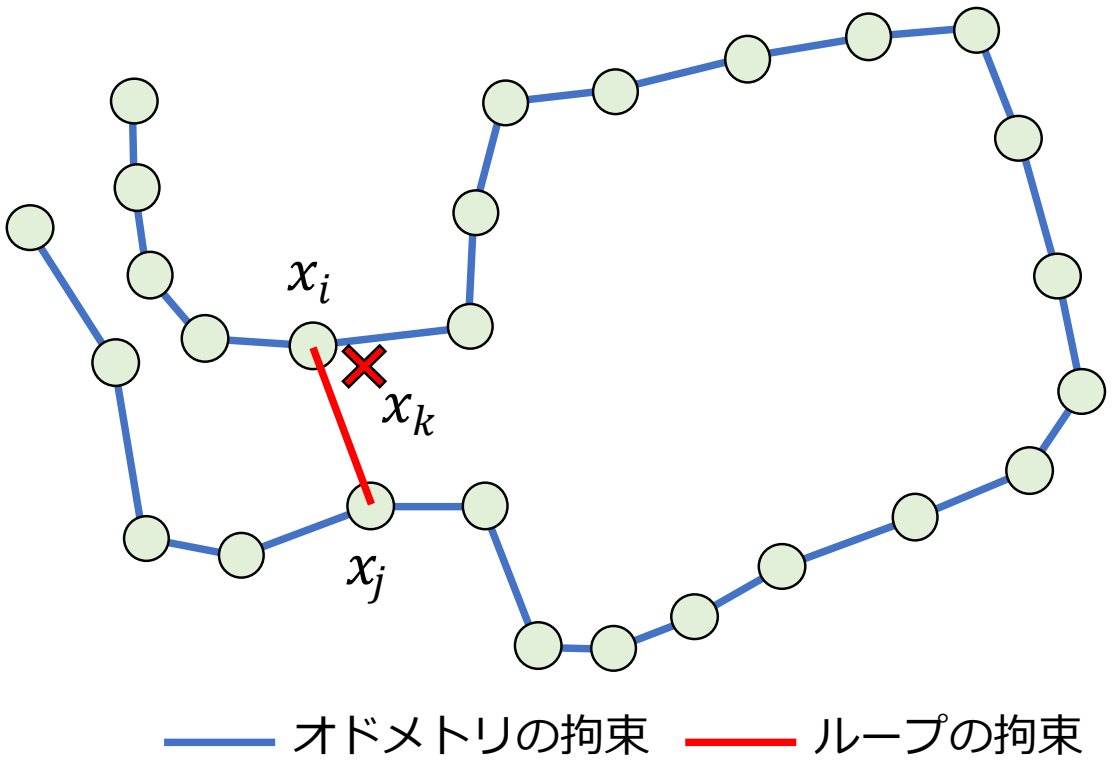
- ループ検出によるエッジの作成 (ループ検出) [16]
  - x_j が, 地図上の x_k と対応することが判明
  - ノード x_i と x_j の間に, ループを表すエッジを追加



ポーズグラフの構築

- ループ検出によるエッジの作成 (エッジ追加) [16]
  - ノード x_i と x_j の間に, ループを表すエッジを追加
  - エッジの相対姿勢 z_{ij} は, x_i と x_k の相対姿勢とする

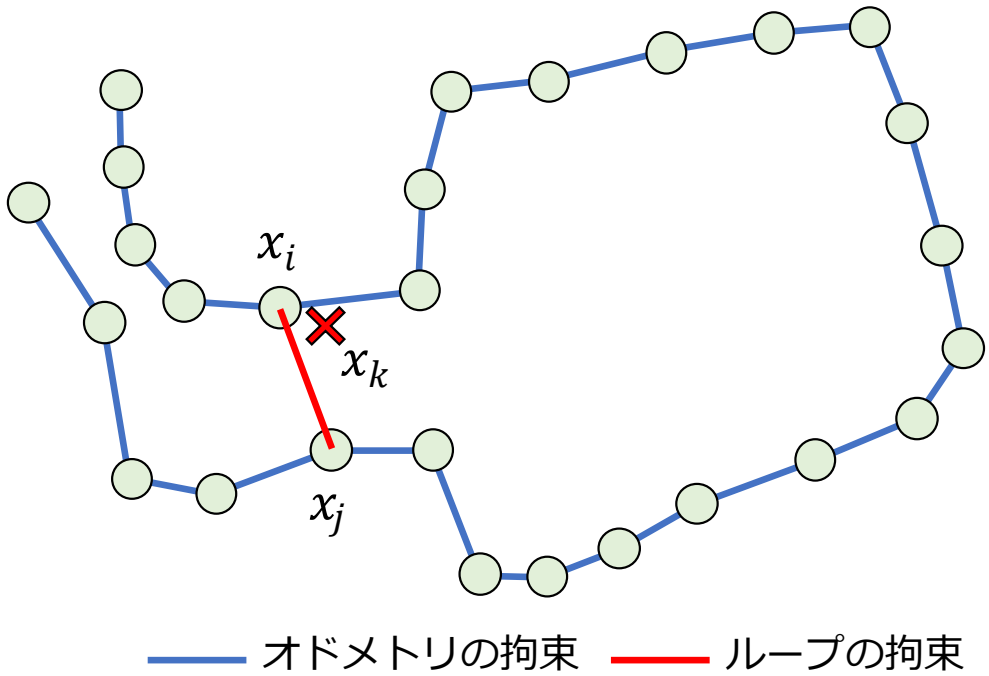
    $\Leftarrow$ x_i と x_j の相対姿勢ではないことに注意



ポーズグラフの構築

- ループ検出によるエッジの作成 (エッジ追加) [16]
  - ノード x_i と x_j の間に, ループを表すエッジを追加
  - 逐次処理により, ノードの姿勢 x_i と x_j は既に求まっている
  - 逐次処理により求めた, ノード x_i と x_j の相対姿勢

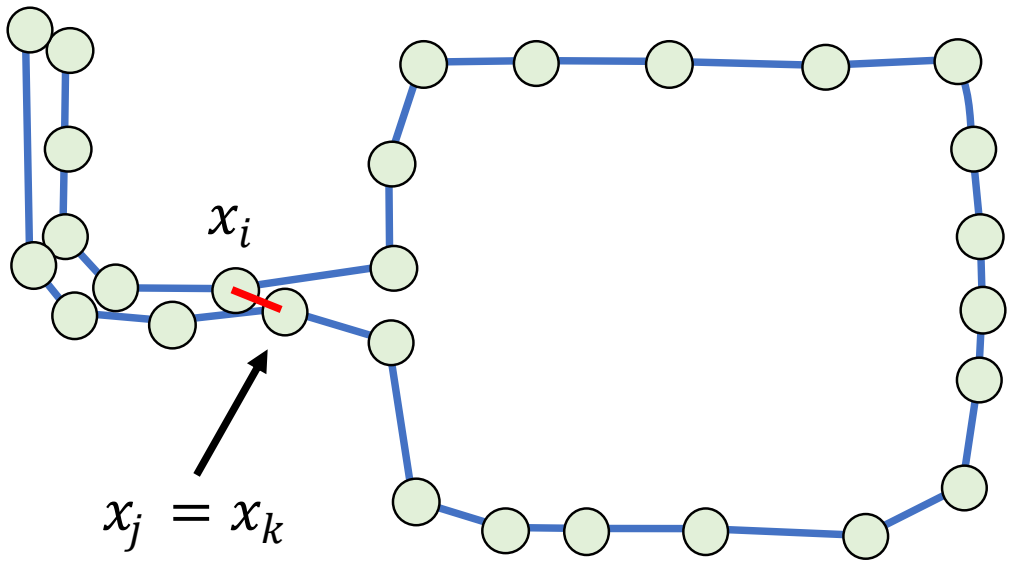
    $\Leftarrow$ x_i と x_k の相対姿勢 (実際のエッジの観測) とは大きく異なる



ポーズグラフの構築

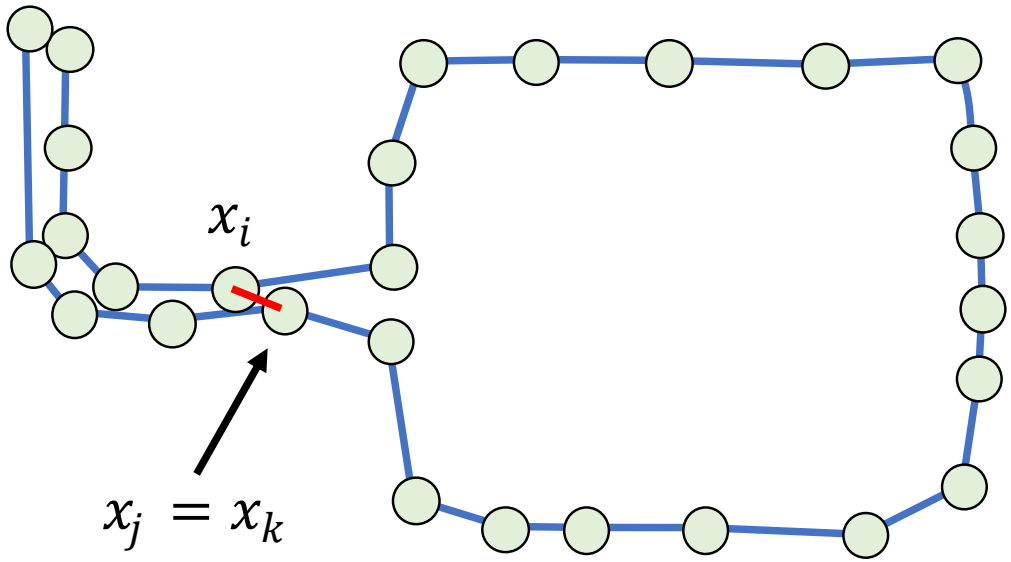
- ループ検出によるエッジの作成 (ポーズ調整) [16]
  - ループを表すエッジを追加した後, ポーズ調整を実行
  - エッジの拘束を満たすように, ポーズグラフを最適化
  - ノード x_j が x_k に重なるように移動 (ノードとエッジの矛盾を解消)

    $\Rightarrow$ それに合わせて, 他のノードも修正される



ポーズグラフの構築

- ループ検出によるエッジの作成 (ポーズ調整) [16]
  - ループを表すエッジを追加した後, **ポーズ調整**を実行
  - 逐次処理により求まった姿勢を初期値として, 反復実行される (後述)
  - ポーズ調整: 関数 $F(x_{0:t})$ の, ノードの姿勢 $x_{0:t}$ に関する最小化



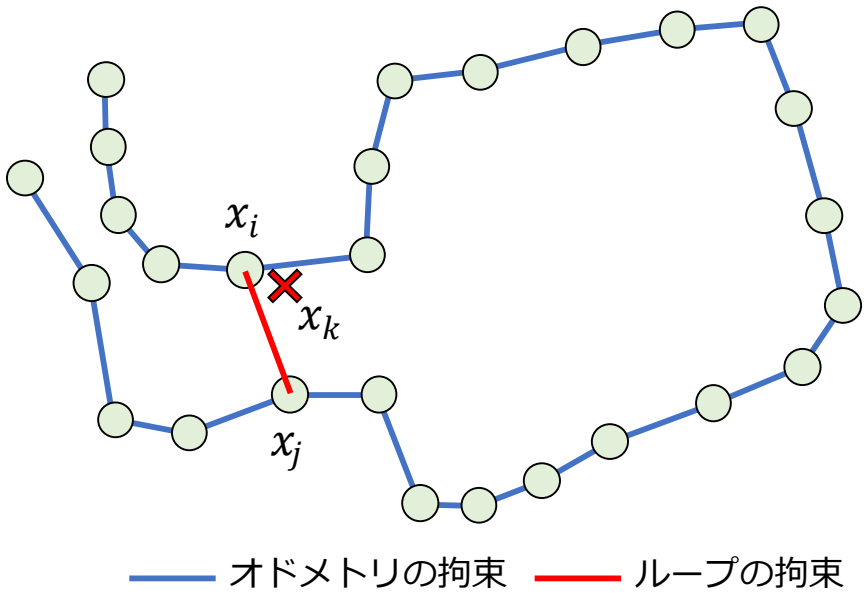
ポーズグラフの構築

- ループ検出によるエッジの作成 (補足; ポーズ調整前) [16]
  - エッジの残差: $e_{ij} = z_{ij} - \hat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ (ノードとエッジの乖離具合)
  - x_i, x_j は逐次処理により求まったノードの姿勢 (初期値)

    $\Rightarrow \hat{z}_{ij}(x_i, x_j) = x_j \ominus x_i$ は, 2 つのノード x_i, x_j の相対姿勢

    $\Rightarrow$ エッジがもつ, 観測により得た z_{ij} は, x_i, x_k の相対姿勢

    $\Rightarrow$ z_{ij} と $\hat{z}_{ij}$ は大きく異なるので, 残差 e_{ij} は大きい

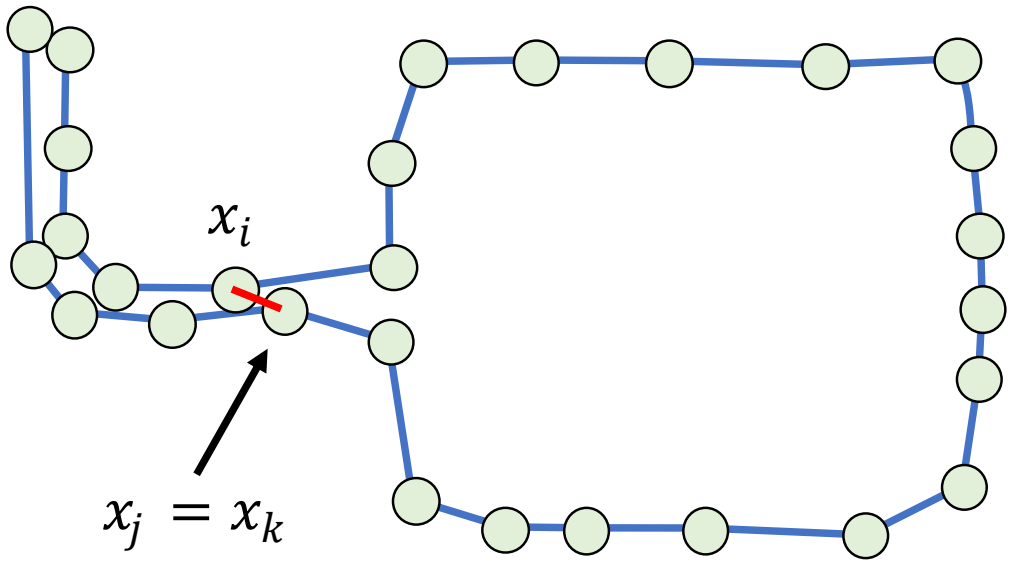


ポーズグラフの構築

- ループ検出によるエッジの作成 (補足; ポーズ調整後) [16]
  - エッジの残差: $e_{ij} = z_{ij} - \hat{z}_{ij}(x_i, x_j)$
  - ポーズ調整後は, ノード x_j が x_k に近づく

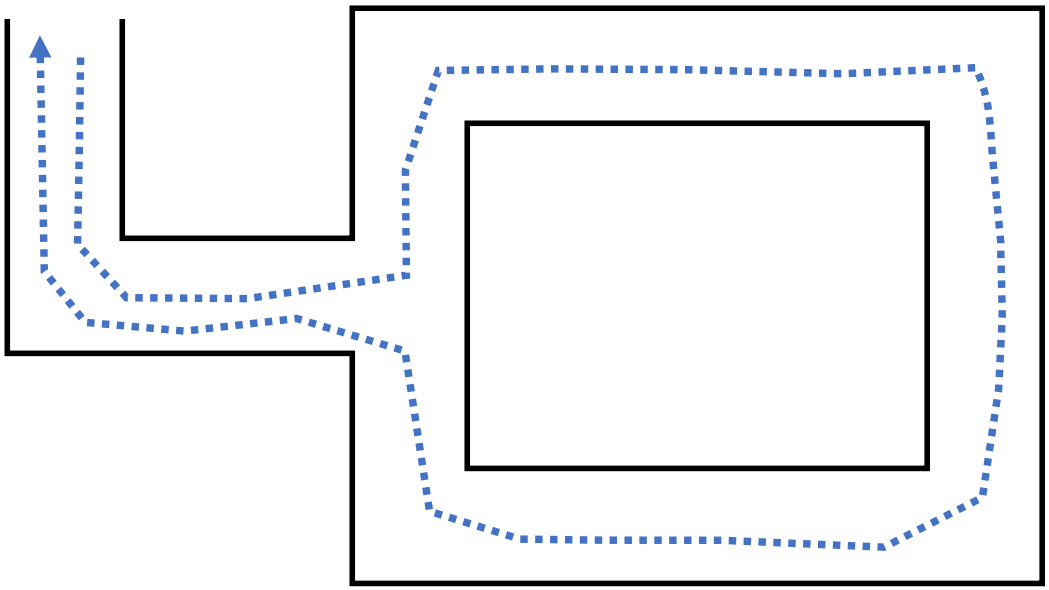
    $\Rightarrow$ ノード x_i, x_j の相対姿勢が, 観測 $z_{ij}(x_i, x_k$ の相対姿勢) に近づく

    $\Rightarrow$ $\hat{z}_{ij}$ が z_{ij} に近づくので, 残差 e_{ij} は小さくなる



ポーズグラフの構築

- ループ検出によるエッジの作成 (ポーズ調整) [16]
  - ポーズ調整により，ロボットの軌跡 (全ノードの姿勢) が修正される
  - 新しい軌跡を使って，地図を作成し直す
  - 大域的に整合性の取れた，精度の良い地図が得られる



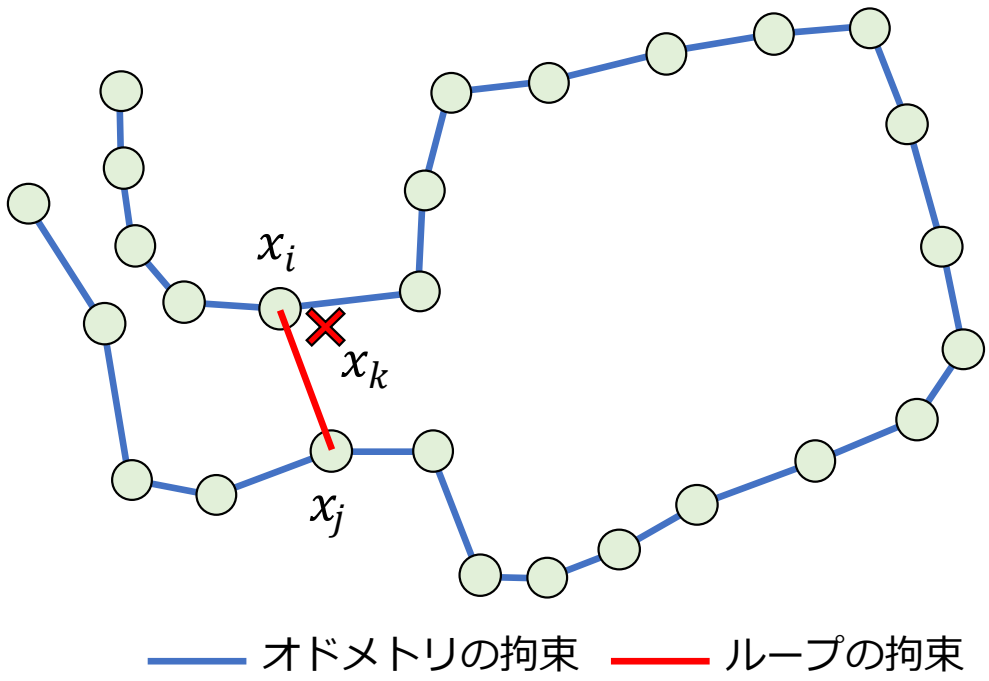
目次

ポーズグラフの構築

- まとめ
  - ポーズグラフのエッジには 2 種類ある

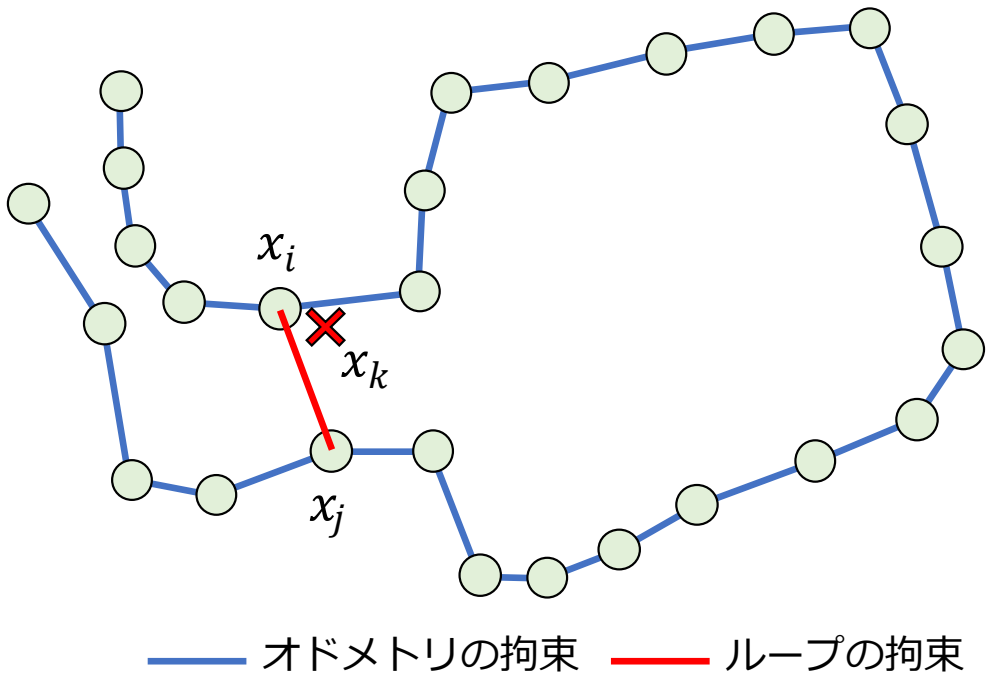
    $\Rightarrow$ オドメトリを表すエッジと, ループを表すエッジ
  - オドメトリを表すエッジは, 隣接する 2 時刻のノードを結ぶ

    $\Leftrightarrow$ ループを表すエッジは, 時間的に離れた 2 つのノードを結ぶ



ポーズグラフの構築

- まとめ
  - オドメトリを表すエッジは, 逐次処理により作成
    $\Leftrightarrow$ ループを表すエッジは, ループ検出により作成
  - ループを表すエッジのおかげで, ポーズ調整が可能になる
    $\Leftarrow$ オドメトリを表すエッジだけでは, ポーズ調整はできない



目次

目次

ポーズ調整の解法

- ポーズグラフを基に最適化問題を構成 [5, 7, 16, 17]
  - ポーズグラフが解くのは，非線形最小二乗問題
  - ポーズグラフのもつ情報を，多数の連立方程式に変換する
  - ポーズ調整は，反復的なアルゴリズム
    ⇐ ガウス・ニュートン法 (Gauss-Newton)
    ⇐ レーベンバーグ・マーカート法 (Levenberg-Marquardt)
  - 連立方程式は大規模かつスパース (2 次元ならノード数の 3 倍)
    ⇐ 疎行列コレスキー分解 (Sparse Cholesky Factorization)
    ⇐ 前処理付き共役勾配法 (Preconditioned Conjugate Gradient)
  - スパース性は，ポーズグラフが疎であることに由来
    ⇐ エッジ数は，ノード数より少し多い程度

目次

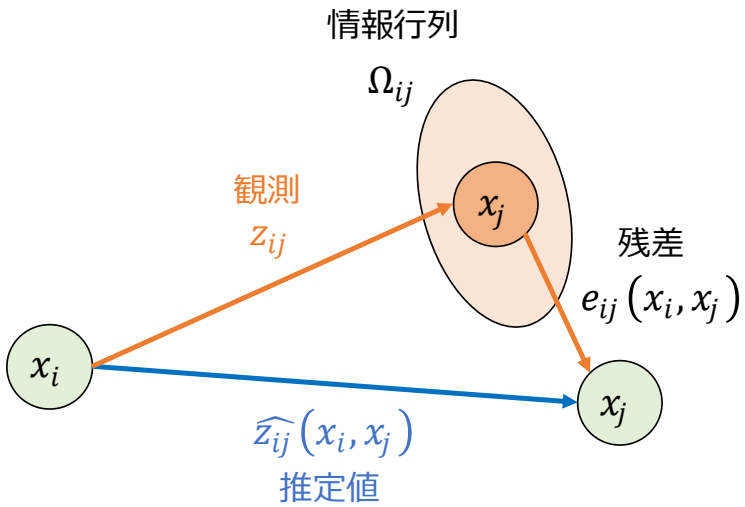
ポーズ調整の解法

- ポーズ調整の入出力
  - 入力: ポーズグラフ

    $\Leftarrow$ ノードは姿勢 x_t を表現

    $\Leftarrow$ エッジは観測に基づく相対姿勢 z_{ij} と，情報行列 Ω_{ij} を保持
  - ノードの姿勢 x_t は変数

    $\Leftrightarrow$ エッジの相対姿勢 z_{ij} と情報行列 Ω_{ij} は定数
  - 出力: 修正されたノードの姿勢 $x_{0:t}$



目次

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整とは [5, 17]
  - 関数 $F(x_{0:t})$ を，ノードの姿勢 $x_{0:t}$ について最小化する問題

$$x^*_{0:t} = \arg\min_{x_{0:t}} F(x_{0:t})$$

  - 関数 $F(x_{0:t})$ は，次のように表現される

$$\begin{aligned} F(x_{0:t}) &= F_0(x_0) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} F_{ij}(x_i, x_j) \\ F_0(x_0) &= (x_0 - \widehat{x}_0)^\top \Omega_0 (x_0 - \widehat{x}_0) \\ F_{ij}(x_i, x_j) &= e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(x_i, x_j) \end{aligned}$$

  - $F_0(x_0)$ は，初期姿勢 x_0 を定数 $\widehat{x}_0$ に固定する役割
  - 情報行列 Ω_0 は対角行列で，各成分は非常に大きな値に設定 (定数)

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整とは [5, 17]
  - 関数 $F(x_{0:t})$ は, 次のように表現される

$$
\begin{aligned}
F(x_{0:t}) &= F_0(x_0) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} F_{ij}(x_i, x_j) \\
F_0(x_0) &= (x_0 - \widehat{x}_0)^\top \Omega_0 (x_0 - \widehat{x}_0) \\
F_{ij}(x_i, x_j) &= e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(x_i, x_j)
\end{aligned}
$$

  - $F_{ij}(x_i, x_j)$ は, ノード x_i, x_j を結ぶエッジ (i, j) に対応する項
  - ポーズグラフ内の全エッジに対して, F_{ij} を足し合わせる

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整とは [5, 17]
  - 関数 $F(x_{0:t})$ は, 次のように表現される

$$
\begin{aligned}
F(x_{0:t}) &= F_0(x_0) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} F_{ij}(x_i, x_j) \\
F_{ij}(x_i, x_j) &= e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(x_i, x_j)
\end{aligned}
$$

  - $e_{ij}(x_i, x_j)$ は, 各エッジの残差

$$
e_{ij}(x_i, x_j) = z_{ij} - \widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)
$$

  - z_{ij} は各エッジがもつ相対姿勢 (定数)
  - $\widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ は, エッジの両端のノード x_i, x_j の相対姿勢
    $\Leftarrow$ ノードの姿勢 x_i, x_j は変数であり, 最適化の対象

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整とは [5, 17]
  - $e_{ij}(x_i, x_j)$ は, 各エッジの残差

$$e_{ij}(x_i, x_j) = z_{ij} - \widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$$

  - z_{ij} は各エッジがもつ相対姿勢 (定数)
  - $\widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ は, エッジの両端のノード x_i, x_j の相対姿勢
  - $x_i = \left[\xi_i^x, \xi_i^y, \xi_i^\theta\right]^\top$, $x_j = \left[\xi_j^x, \xi_j^y, \xi_j^\theta\right]^\top$ とすると,

$$\widehat{z}_{ij}(x_i, x_j) = x_j \ominus x_i = \begin{bmatrix} \cos\xi_i^\theta & \sin\xi_i^\theta & 0 \\ -\sin\xi_i^\theta & \cos\xi_i^\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_j^x - \xi_i^x \\ \xi_j^y - \xi_i^y \\ \xi_j^\theta - \xi_i^\theta \end{bmatrix}.$$

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (初期値) [5]
  - ノードの姿勢 $x_{0:t}$ は, SLAM の逐次実行によって既に得られている
    $\Rightarrow$ これを初期値として採用 ($\breve{x}_{0:t}$ とする)
  - 各姿勢 x_i を, 初期値 $\breve{x}_i$ と, 初期値からの差分 Δx_i を用いて表現

$$x_i = \breve{x}_i + \Delta x_i \tag{24}$$

  - 続いて, 姿勢 $x_{0:t}$ についての関数 $F(x_{0:t})$ を書き換える
    $\Rightarrow$ 差分 $\Delta x_0, \cdots, \Delta x_t$ についての関数に変換
    $\Rightarrow$ $F(x_{0:t})$ を Δx に関して最小化

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (テイラー展開) [5]
  - 初期値 $\breve{x}_i, \breve{x}_j$ のまわりで, 残差 $e_{ij}(x_i, x_j)$ をテイラー展開 (1 次)

$$e_{ij}(x_i, x_j) = e_{ij}(\breve{x}_i + \Delta x_i, \breve{x}_j + \Delta x_j) \tag{25}$$
$$\simeq e_{ij}(\breve{x}_i, \breve{x}_j) + J_i \Delta x_i + J_j \Delta x_j \tag{26}$$

  - 微小な変化であれば ($\Delta x_i, \Delta x_j$ が小さければ) 成り立つ
  - ここで, J_i, J_j は 3×3 のヤコビ行列

    $\Rightarrow x_i = \breve{x}_i, x_j = \breve{x}_j$ の下での, $e_{ij}(x_i, x_j)$ の x_i, x_j に関する偏微分

$$J_i = \left. \frac{\partial e_{ij}(x_i, x_j)}{\partial x_i} \right|_{x_i = \breve{x}_i, x_j = \breve{x}_j} \tag{27}$$

$$J_j = \left. \frac{\partial e_{ij}(x_i, x_j)}{\partial x_j} \right|_{x_i = \breve{x}_i, x_j = \breve{x}_j} \tag{28}$$

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (表記の簡略化) [5]
  - 姿勢 $x_{0:t}$ を全て繋げて, 1 本の細長いベクトル x にする

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_t \end{bmatrix} \tag{29}$$

  - ポーズグラフのノード数を T とする $(T = t + 1)$
    $\Rightarrow$ x は $3T$ 次元ベクトル $(x_0, \cdots, x_t$ は 3 次元)

  - $e_{ij}(x_i, x_j)$ は x の関数とみなせる (実際には x_i, x_j のみの関数)

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (残差の式変形) [5]
  - $e_{ij}(x_i, x_j)$ は x の関数でもあるので, 次のように書ける

$$
\begin{aligned}
e_{ij}(x_i, x_j) &= e_{ij}(\breve{x}_i + \Delta x_i, \breve{x}_j + \Delta x_j) && (30)\\
&= e_{ij}(\breve{x} + \Delta x) && (31)\\
&\simeq e_{ij}(\breve{x}) + J_{ij}\Delta x && (32)
\end{aligned}
$$

  - 但し $\breve{x}, \Delta x$ は, $\breve{x}_0, \cdots, \breve{x}_t$, $\Delta x_0, \cdots, \Delta x_t$ を全て繋げたもの
    $\Rightarrow \breve{x}, \Delta x$ も $3T$ 次元ベクトル
    $\Rightarrow x = \breve{x} + \Delta x$ であることに注意

$$
\begin{aligned}
\breve{x} &= \begin{bmatrix} \breve{x}_0^\top & \breve{x}_1^\top & \cdots & \breve{x}_t^\top \end{bmatrix}^\top && (33)\\
\Delta x &= \begin{bmatrix} \Delta x_0^\top & \Delta x_1^\top & \cdots & \Delta x_t^\top \end{bmatrix}^\top && (34)
\end{aligned}
$$

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (残差の式変形) [5]
  - $e_{ij}(x_i, x_j)$ は次のように書ける

$$e_{ij}(x_i, x_j) \simeq e_{ij}(\breve{x}) + J_{ij}\Delta x$$

  - J_{ij} は $3 \times 3T$ の横長なヤコビ行列

$$J_{ij} = [0 \ \cdots \ 0 \ J_i \ 0 \ \cdots \ 0 \ J_j \ 0 \ \cdots \ 0] \tag{35}$$

  - J_{ij} は, ノード i と j に対応する部分に, ヤコビ行列が入る
    $\Leftarrow 3i$ から $3i+2$ 列までが J_i, そして, $3j$ から $3j+2$ 列までが J_j
    $\Leftarrow$ それ以外の要素は, 全て 0

  - 以下は簡単に確認できる

$$J_{ij}\Delta x = J_i \Delta x_i + J_j \Delta x_j \tag{36}$$

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (項 F_{ij} の式変形) [5]
  - $F_{ij}(x_i, x_j)$ は以下のようであった

$$F_{ij}(x_i, x_j) = e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(x_i, x_j)$$

  - これも x の関数として, 次のように書き直せる

$$\begin{aligned} F_{ij}(x_i, x_j) &= F_{ij}(\breve{x}_i + \Delta x_i, \breve{x}_j + \Delta x_j) && (37) \\ &= F_{ij}(\breve{x} + \Delta x) && (38) \\ &= e_{ij}(\breve{x} + \Delta x)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(\breve{x} + \Delta x) && (39) \end{aligned}$$

  - 先程のテイラー展開を代入する

$$F_{ij}(\breve{x} + \Delta x) \simeq \left(e_{ij}(\breve{x}) + J_{ij}\Delta x\right)^\top \Omega_{ij} \left(e_{ij}(\breve{x}) + J_{ij}\Delta x\right)$$

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (項 F_{ij} の式変形) [5]
  - $F_{ij}(\breve{x} + \Delta x)$ を, Δx の関数として表す

$$
\begin{aligned}
& F_{ij}(\breve{x} + \Delta x) \\
\simeq\ & \left(e_{ij}(\breve{x}) + J_{ij}\Delta x\right)^{\top} \Omega_{ij} \left(e_{ij}(\breve{x}) + J_{ij}\Delta x\right) \\
=\ & e_{ij}(\breve{x})^{\top}\Omega_{ij}e_{ij}(\breve{x}) + 2e_{ij}(\breve{x})^{\top}\Omega_{ij}J_{ij}\Delta x + \Delta x^{\top}J_{ij}^{\top}\Omega_{ij}J_{ij}\Delta x \\
=\ & c_{ij} + 2b_{ij}^{\top}\Delta x + \Delta x^{\top}H_{ij}\Delta x \qquad (40)
\end{aligned}
$$

  - 但し, 係数 c_{ij}, b_{ij}, H_{ij} は次のように定める ($\Omega_{ij}^{\top} = \Omega_{ij}$ に注意)

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &= e_{ij}(\breve{x})^{\top}\Omega_{ij}e_{ij}(\breve{x}) && (41) \\
b_{ij} &= J_{ij}^{\top}\Omega_{ij}e_{ij}(\breve{x}) && (42) \\
H_{ij} &= J_{ij}^{\top}\Omega_{ij}J_{ij} && (43)
\end{aligned}
$$

  - c_{ij} はスカラー / b_{ij} は $3T$ 次元ベクトル / H_{ij} は $3T$ 次正方行列

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (係数の表現) [5]
  - ここで, 係数 b_{ij}, H_{ij} の中身を調べてみる

$$F_{ij}(\breve{x} + \Delta x) \simeq c_{ij} + 2b_{ij}^{\top}\Delta x + \Delta x^{\top} H_{ij}\Delta x$$

  - $3 \times 3T$ ヤコビ行列 J_{ij} は次のようであった (J_i, J_j 以外は全て 0)

$$J_{ij} = [\cdots \ J_i \ \cdots \ J_j \ \cdots]$$

  - J_i, J_j は, ノード x_i, x_j に関するヤコビ行列 (3×3)
    $\Leftarrow$ 初期値 $x = \breve{x}$ のもとでの, 残差 $e_{ij}(x)$ の偏微分

$$J_i = \left.\frac{\partial e_{ij}(x_i, x_j)}{\partial x_i}\right|_{x_i=\breve{x}_i, x_j=\breve{x}_j} = \left.\frac{\partial e_{ij}(x)}{\partial x_i}\right|_{x=\breve{x}}$$

$$J_j = \left.\frac{\partial e_{ij}(x_i, x_j)}{\partial x_j}\right|_{x_i=\breve{x}_i, x_j=\breve{x}_j} = \left.\frac{\partial e_{ij}(x)}{\partial x_j}\right|_{x=\breve{x}}$$

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (係数 b_{ij}, H_{ij} の表現) [5]
  - 係数 b_{ij} の中身を調べてみる

$$
\begin{aligned}
b_{ij} &= J_{ij}^{\top} \Omega_{ij} e_{ij}(\breve{x}) \\
&= \begin{bmatrix} \cdots & J_i & \cdots & J_j & \cdots \end{bmatrix}^{\top} \Omega_{ij} e_{ij}(\breve{x}) \\
&= \begin{bmatrix} \vdots \\ J_i^{\top} \\ \vdots \\ J_j^{\top} \\ \vdots \end{bmatrix} \Omega_{ij} e_{ij}(\breve{x}) = \begin{bmatrix} \vdots \\ J_i^{\top} \Omega_{ij} e_{ij}(\breve{x}) \\ \vdots \\ J_j^{\top} \Omega_{ij} e_{ij}(\breve{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{44}
$$

  - ノード i に対応するブロック: $3i$ から $3i+2$ 行目まで
  - ノード j に対応するブロック: $3j$ から $3j+2$ 行目まで

ポーズ調整の解法

- 続いて，係数 H_{ij} の中身を調べてみる

$$
\begin{aligned}
H_{ij} &= J_{ij}^{\top} \Omega_{ij} J_{ij} \\
&= \begin{bmatrix} \vdots \\ J_i^{\top} \\ \vdots \\ J_j^{\top} \\ \vdots \end{bmatrix} \Omega_{ij} \begin{bmatrix} \cdots & J_i & \cdots & J_j & \cdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & J_i^{\top} \Omega_{ij} J_i & \cdots & J_i^{\top} \Omega_{ij} J_j & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & J_j^{\top} \Omega_{ij} J_i & \cdots & J_j^{\top} \Omega_{ij} J_j & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{45}
$$

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (項 F_0 の式変形) [5]
  - $F_{ij}(\breve{x} + \Delta x)$ は, Δx の関数として書いた

$$F_{ij}(\breve{x} + \Delta x) \simeq c_{ij} + 2b_{ij}^{\top}\Delta x + \Delta x^{\top} H_{ij}\Delta x$$

  - ポーズ調整で最適化したい関数 $F(x_{0:t})$ は, 次のようであった

$$F(x_{0:t}) = F_0(x_0) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} F_{ij}(x_i, x_j)$$

  - $F_0(x_0)$ は, 初期姿勢 x_0 を $\widehat{x}_0$ に固定するための項
  - 項 $F_0(x_0)$ も F_{ij} と同じく, Δx の関数として書いておく

$$F_0(x_0) = (x_0 - \widehat{x}_0)^{\top} \Omega_0 (x_0 - \widehat{x}_0)$$

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (項 F_0 の式変形) [5, 17]
  - 最初に, $F_0(x_0)$ を, Δx_0 の関数として表す

$$
\begin{aligned}
F_0(x_0) &= F_0(\breve{x}_0 + \Delta x_0) && (46)\\
&= (\breve{x}_0 + \Delta x_0 - \widehat{x}_0)^\top \Omega_0 (\breve{x}_0 + \Delta x_0 - \widehat{x}_0)\\
&= \Delta x_0^\top \Omega_0 \Delta x_0 + 2 (\breve{x}_0 - \widehat{x}_0)^\top \Omega_0 \Delta x_0 +\\
&\quad (\breve{x}_0 - \widehat{x}_0)^\top \Omega_0 (\breve{x}_0 - \widehat{x}_0)\\
&= \Delta x_0^\top \Omega_0 \Delta x_0 && (47)
\end{aligned}
$$

  - $\breve{x}_0$ は x_0 の初期値

    $\Rightarrow$ アルゴリズムの実行前は $x_0 = \widehat{x}_0$ であるので, $\breve{x}_0 = \widehat{x}_0$

    $\Rightarrow$ $\breve{x}_0 - \widehat{x}_0 = 0$ が成り立つ

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (項 F_0 の式変形) [5]
  - 最後に, $F_0(x_0)$ を, Δx の関数として表す

$$F_0(x) = F_0(\breve{x} + \Delta x) = \Delta x^\top \widetilde{\Omega}_0 \Delta x \tag{48}$$

  - 上記の $\widetilde{\Omega}_0$ は, $3T \times 3T$ 行列

    $\Rightarrow 3 \times 3$ 行列 Ω_0 を左上に置き, 残りの部分を 0 で埋めて拡張

$$\widetilde{\Omega}_0 = \begin{bmatrix} \Omega_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix} \tag{49}$$

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (関数 $F(x_{0:t})$ の式変形) [5]
  - $F_{ij}(x_i, x_j)$ を, Δx の関数 $F_{ij}(\breve{x} + \Delta x)$ として表現した

$$F_{ij}(\breve{x} + \Delta x) \simeq c_{ij} + 2b_{ij}^{\top}\Delta x + \Delta x^{\top} H_{ij} \Delta x$$

  - 同様に $F_0(x_0)$ も, Δx の関数 $F_0(\breve{x} + \Delta x)$ として表現した

$$F_0(\breve{x} + \Delta x) = \Delta x^{\top} \widetilde{\Omega}_0 \Delta x$$

  - 最後に, 関数 $F(x_{0:t})$ を, 差分 Δx の関数に書き換える (当初の目標)

$$F(x_{0:t}) = F_0(x_0) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} F_{ij}(x_i, x_j)$$

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (関数 $F(x_{0:t})$ の式変形) [5]
  - 関数 $F(x_{0:t})$ を, Δx の関数として表す

$$
\begin{aligned}
F(x) &= F(\breve{x} + \Delta x) && (50)\\
&= F_0(\breve{x} + \Delta x) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} F_{ij}(\breve{x} + \Delta x) && (51)\\
&\simeq \Delta x^\top \widetilde{\Omega}_0 \Delta x + \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} \left(c_{ij} + 2b_{ij}^\top \Delta x + \Delta x^\top H_{ij} \Delta x\right) && (52)\\
&= c + 2b^\top \Delta x + \Delta x^\top H \Delta x && (53)
\end{aligned}
$$

  - 但し, 係数 c, b, H は次のように定める

$$
c = \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} c_{ij}, \quad b = \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} b_{ij}, \quad H = \widetilde{\Omega}_0 + \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} H_{ij} \qquad (54)
$$

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (更新式の導出) [5]
  - 関数 $F(x_{0:t}) = F(\breve{x} + \Delta x)$ を最小化する Δx を求める

$$\frac{\partial F(\breve{x} + \Delta x)}{\partial \Delta x} = 0 \tag{55}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \Delta x}\left(c + 2b^{\top}\Delta x + \Delta x^{\top} H \Delta x\right) = 0 \tag{56}$$

$$\Rightarrow \quad 2b + 2H\Delta x = 0 \tag{57}$$

  - 従って, 最適な Δx に関して, 次の線形方程式が得られる

$$H\Delta x^{*} = -b \tag{58}$$

  - 解 Δx^{*} を初期値 $\breve{x}$ に足しあわせて, 全ノードの姿勢 x^{*} を得る

$$x^{*} = \breve{x} + \Delta x^{*} \tag{59}$$

ポーズ調整の解法

- ポーズ調整のアルゴリズムの導出 (更新式の導出) [5]
  - 解 Δx^* を初期値 $\breve{x}$ に足しあわせて, 全ノードの姿勢 x^* を得る

$$x^* = \breve{x} + \Delta x^*$$

  - $F_{ij}(\breve{x} + \Delta x)$ は, テイラー展開により近似
    $\Leftarrow F_{ij}$ は, 初期値 $\breve{x}$ のまわりで線形化
    $\Leftarrow F_{ij}$ の近似は, 初期値 $\breve{x}$ の近傍でのみ正確
  - 求めた解 x^* を初期値 $\breve{x}$ として, 反復計算を行う
  - 長かった!

目次

目次

ポーズ調整のまとめ

- ポーズ調整の入力
  - ポーズグラフの, 全ノードの姿勢 $x_{0:t}$
    $\Leftarrow$ SLAM の逐次処理により得られ, 初期値 $\breve{x}$ として使用
  - ポーズグラフの, 全エッジのもつ観測 z_{ij} と, 情報行列 Ω_{ij}
    $\Leftarrow$ 観測 z_{ij} は, ノード i と j の相対姿勢 (拘束)

- ポーズ調整の出力
  - 改良された, 全ノードの姿勢 $x^*_{0:t}$

目次

ポーズ調整のまとめ

- ポーズ調整のアルゴリズム (概略) [5]
  1. 目的関数 $F(\breve{x} + \Delta x)$ の係数 H, b を計算する

$$F(\breve{x} + \Delta x) \simeq c + 2b^\top \Delta x + \Delta x^\top H \Delta x$$

  2. 係数 H, b から構成した次の方程式を, Δx について解く

$$H \Delta x = -b$$

  3. 方程式の解 Δx^* を使って, 全ノードの姿勢 x を更新する

$$x^* = \breve{x} + \Delta x^*$$

  4. 目的関数 $F(x)$ の値が収束したら終了
     $\Rightarrow$ そうでなければ, 更新された姿勢 x^* を初期値 $\breve{x}$ として, (1) に戻る

  - ガウス・ニュートン法の枠組み

目次

ポーズ調整のまとめ

- ポーズ調整のアルゴリズム (1/4: 係数 H, b の計算) [5]
  - $3T \times 3T$ 行列 H は, 次のように記述される

$$H = \widetilde{\Omega}_0 + \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} H_{ij}, \quad \widetilde{\Omega}_0 = \begin{bmatrix} \Omega_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \overbrace{J_i^\top \Omega_{ij} J_i}^{\begin{matrix}[3i,\ 3i{+}2]\text{ 行}\\ [3i,\ 3i{+}2]\text{ 列}\end{matrix}} & \overbrace{J_i^\top \Omega_{ij} J_j}^{\begin{matrix}[3i,\ 3i{+}2]\text{ 行}\\ [3j,\ 3j{+}2]\text{ 列}\end{matrix}} \\ & \vdots & \vdots \\ & \underbrace{J_j^\top \Omega_{ij} J_i}_{\begin{matrix}[3j,\ 3j{+}2]\text{ 行}\\ [3i,\ 3i{+}2]\text{ 列}\end{matrix}} & \underbrace{J_j^\top \Omega_{ij} J_j}_{\begin{matrix}[3j,\ 3j{+}2]\text{ 行}\\ [3j,\ 3j{+}2]\text{ 列}\end{matrix}} \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

ポーズ調整のまとめ

- ポーズ調整のアルゴリズム (1/4: 係数 H, b の計算) [5]
  - $3T$ 次ベクトル b は, 次のように記述される

$$b = \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} b_{ij}$$

$$b_{ij} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \overbrace{J_i^\top \Omega_{ij} e_{ij}(\breve{x})}^{[3i,\ 3i+2]\text{ 行}} \\ \vdots \\ \underbrace{J_j^\top \Omega_{ij} e_{ij}(\breve{x})}_{[3j,\ 3j+2]\text{ 行}} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

  - 係数 H, b はいずれもスパース

ポーズ調整のまとめ

- ポーズ調整のアルゴリズム (1/4: 係数 H, b の計算) [5]
  1. 初期化: $b = 0,\ H = 0$
  2. 各ノード $(i, j) \in \mathcal{C}$ について, 以下を順に実行
  3. 3×3 のヤコビ行列 J_i, J_j を計算
     $\Leftarrow$ 初期値 $x = \breve{x}$ のもとでの, 残差 $e_{ij}(x)$ の偏微分

$$J_i = \left.\frac{\partial e_{ij}(x)}{\partial x_i}\right|_{x=\breve{x}}, \quad J_j = \left.\frac{\partial e_{ij}(x)}{\partial x_j}\right|_{x=\breve{x}}$$

  4. 残差 $e_{ij}(\breve{x}) = z_{ij} - \hat{z}_{ij}(\breve{x})$ を計算
     $\Leftarrow \hat{z}_{ij}(\breve{x}) = \hat{z}_{ij}(\breve{x}_i, \breve{x}_j) = \breve{x}_j \ominus \breve{x}_i$ は, $\breve{x}_i$ と $\breve{x}_j$ の相対姿勢

ポーズ調整のまとめ

5 行列 H の 4 つのブロックを更新

$$H_{[ii]} \leftarrow H_{[ii]} + J_i^\top \Omega_{ij} J_i, \quad H_{[ij]} \leftarrow H_{[ij]} + J_i^\top \Omega_{ij} J_j$$
$$H_{[ji]} \leftarrow H_{[ji]} + J_j^\top \Omega_{ij} J_i, \quad H_{[jj]} \leftarrow H_{[jj]} + J_j^\top \Omega_{ij} J_j$$

6 ベクトル b を更新

$$b_{[i]} \leftarrow b_{[i]} + J_i^\top \Omega_{ij} e_{ij}(\breve{x}), \quad b_{[j]} \leftarrow b_{[j]} + J_j^\top \Omega_{ij} e_{ij}(\breve{x})$$

7 最後に, 初期姿勢 x_0 を $\widehat{x}_0$ に固定

$$H_{[00]} \leftarrow H_{[00]} + \Omega_0$$

- $H_{[kl]}$ は, 行列 H の (k, l) ブロック (3×3 の部分行列)
  $\Leftarrow [3k,\ 3k+2]$ 行目と, $[3l,\ 3l+2]$ 列目
- $b_{[k]}$ は, ベクトル b の $[3k,\ 3k+2]$ 行目

ポーズ調整のまとめ

- ポーズ調整のアルゴリズム (1/4: 係数 H, b の計算) [5]
  - 各ノードについて計算される H_{ij} はスパース
    $\Leftarrow$ H_{ij} には計 T^2 個の 3×3 ブロックがあるが, 4 つしか埋まらない
  - 行列 H は, 全エッジにおける H_{ij} の和
    $\Rightarrow$ エッジ数 $|\mathcal{C}|$ は, ノード数 $T = t + 1$ より少し多い程度
    $\Rightarrow$ 行列 H のうち, $4\,|\mathcal{C}|$ ブロックが埋まるが, 総数 T^2 よりは少ない
    $\Rightarrow$ 行列 H もやはりスパース
  - $H_{[ji]} = H_{[ij]}^{\top}$ であるから, $H_{[ji]}$ は計算しなくてよい
  - さらに, 行列 H は対称行列であるから, 上三角部分だけ保持すればよい
  - 情報行列 Ω_0 は, 対角成分を十分大きな値とする
    $\Rightarrow$ 初期姿勢 x_0 を $\widehat{x}_0$ に固定

目次

ポーズ調整のまとめ

- ポーズ調整のアルゴリズム (2/4: 方程式を解く) [5]
  - 係数 H, b から構成した方程式を, Δx について解く

$$H\Delta x = -b$$

  - 行列 H はスパース
    $\Rightarrow$ 疎行列コレスキー分解や, 共役勾配法を利用して解く
  - コレスキー分解では, 並べ替え (Ordering) アルゴリズムを使う [11] [7]
  - コレスキー分解は, 正定値対称行列 S を $S = LL^\top$ のように分解
    $\Rightarrow$ コレスキー因子 L には, 新たに非ゼロ成分が生じてしまう
    $\Rightarrow$ 非ゼロ成分が増えると, 計算時間とストレージコストが増加する
  - 分解を行う前に, 行列 S の行と列を適切に並べ替えておく
    $\Rightarrow$ 新たに発生する非ゼロ要素の数を, 抑えることが可能

ポーズ調整のまとめ

- ポーズ調整のアルゴリズム (2/4: 方程式を解く) [5]
  - 係数 H, b から構成した方程式を, Δx について解く

$$H\Delta x = -b$$

  - 線形代数ライブラリ Eigen の場合 (C++)

    ⇒ 疎行列 H の格納: `SparseMatrix`, `std::vector<Triplet>`

    ⇒ 疎行列コレスキー分解: `SimplicialLDLT<SparseMatrix>`

    ⇒ 共役勾配法: `ConjugateGradient<SparseMatrix>`

  - Eigen の疎行列コレスキー分解では, AMD で並べ替えを行う

    ⇒ AMD は, Approximate Minimum Degree の略

    ⇒ 最小次数並べ替えアルゴリズム, グラフ理論に基づく手法

目次

ポーズ調整のまとめ

- ポーズ調整のアルゴリズム (3/4: 姿勢の更新) [5]
  - 方程式の解 Δx^* を使って, 全ノードの姿勢 x を更新する

$$x^* = \breve{x} + \Delta x^*$$

  - この際, $x^* = x_0^*, x_1^*, \cdots, x_t^*$ の**角度成分を $[-\pi, \pi)$ に丸める**
    $\Rightarrow$ **特異点**の問題を防ぐために必要 (3 次元の場合は少し複雑)
    $\Rightarrow$ 詳細は文献 [5] を参照

  - 角度成分に関しては, 2π を足しても同じ意味をもつ
    $\Rightarrow$ 角度成分は位置 (x, y 成分) とは異なり, ユークリッド空間上にはない
    $\Rightarrow$ しかし, 最適化はユークリッド空間上で行っている
    $\Rightarrow$ 角度が境界 $(-\pi, \pi)$ をまたぐと破綻する

目次

ポーズ調整のまとめ

- ポーズ調整のアルゴリズム (4/4: 収束判定) [5]
  - 更新された姿勢 $x^* = \breve{x} + \Delta x^*$ を使って, 目的関数 $F(x^*)$ を計算
    $\Rightarrow F(x^*) - F(\breve{x}) < \varepsilon$ であれば, 収束判定
  - そうでなければ, 初期値 $\breve{x}$ を x^* に設定して, 再度やり直す

目次

ポーズ調整のまとめ

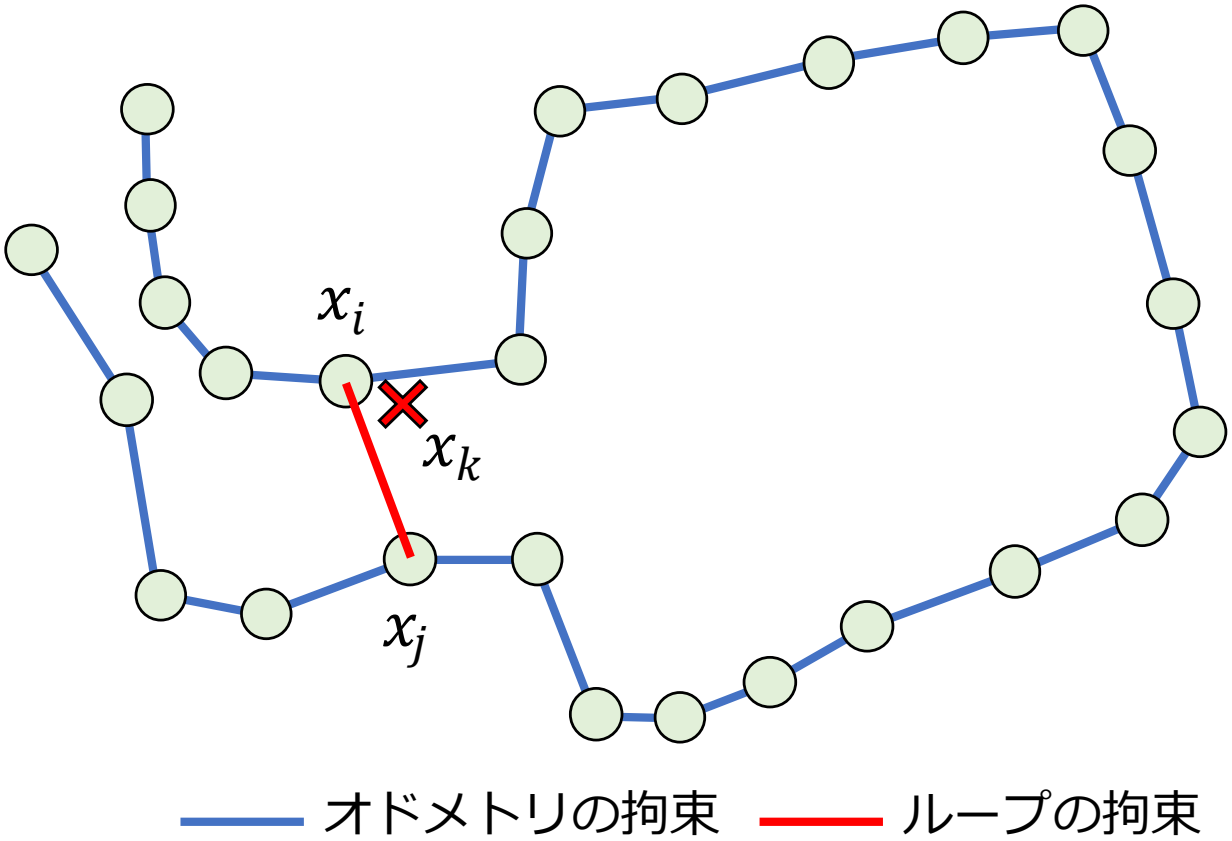
- ポーズ調整のためのライブラリ
  - g2o: A General Framework for Graph Optimization [8]
    ⇒ グラフ最適化のためのライブラリ (C++)
    ⇒ `https://github.com/RainerKuemmerle/g2o`
  - p2o: Single header 2D/3D graph-based SLAM library
    ⇒ 文献 [16] で使われているシングルヘッダライブラリ (C++)
    ⇒ 短く読みやすいので, 参考になった
    ⇒ `https://github.com/furo-org/p2o`

目次

目次

細かな話題 (1)

- ループ辺とオドメトリ辺
  - 今回の場合，ループ辺がないと，ポーズ調整ができない



細かな話題 (1)

- ループ辺の必要性
  - ループ辺がないと，ポーズ調整ができない
  - ポーズ調整は，各エッジについて残差を最小化しようとする

$$e_{ij}(x_i, x_j) = z_{ij} - \widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$$

  - z_{ij} は，ノード i と j の相対姿勢 (拘束)
    $\Rightarrow$ 観測 (スキャンマッチングやループ検出) によって得られる
  - $\widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ は，最適化によって調整される相対姿勢 (x_i, x_j は変数)
    $\Rightarrow$ ポーズグラフのノードの姿勢 x_i, x_j を調整
    $\Rightarrow$ $\widehat{z}_{ij}(x_i, x_j) = x_j \ominus x_i$ を，観測 z_{ij} に近づける

細かな話題 (1)

- ループ辺の必要性
  - ポーズ調整は, 各エッジについて残差を最小化しようとする

$$e_{ij}(x_i, x_j) = z_{ij} - \widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$$

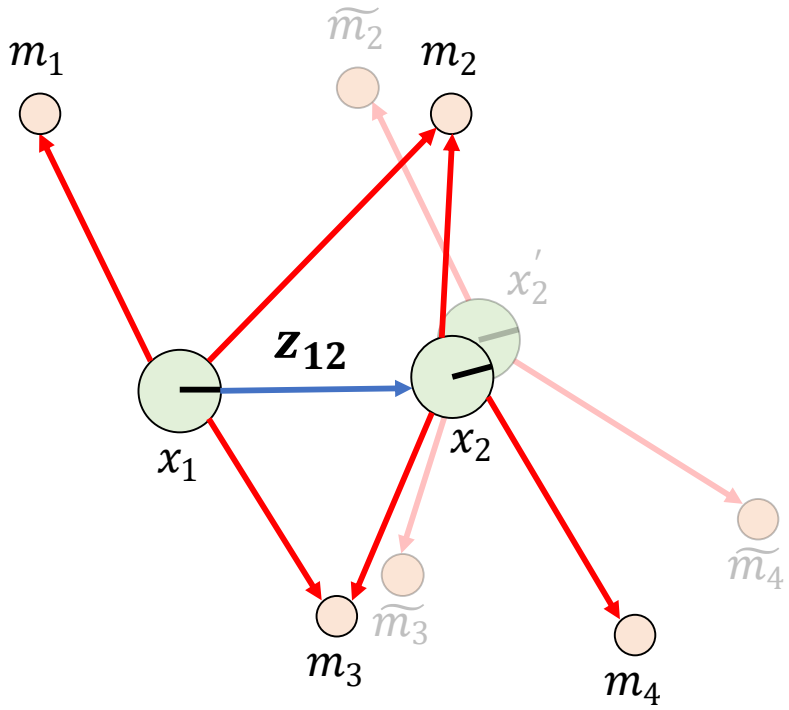
  - ポーズ調整では, 初期値 $\breve{x}_i, \breve{x}_j$ のもとで上記を計算する
    $\Rightarrow$ $\breve{x}_i, \breve{x}_j$ には, 逐次処理により求めたノードの姿勢を利用
    $\Rightarrow$ $e_{ij}(\breve{x}_i, \breve{x}_j) = z_{ij} - \widehat{z}_{ij}(\breve{x}_i, \breve{x}_j)$ を計算する
  - エッジ (i, j) がオドメトリ辺であるとする
    $\Rightarrow$ 隣接する時刻におけるノード i, j の間に張られている
  - オドメトリ辺の場合, 残差 $e_{ij}(\breve{x}_i, \breve{x}_j)$ が 0 である

細かな話題 (1)

- ループ辺の必要性
  - 下図の場合, 2 つのノードの姿勢 (初期値) は $\breve{x}_1 = x_1, \breve{x}_2 = x_2$

    $\Rightarrow$ エッジの観測 z_{12} は, ノード x_1, x_2 の相対姿勢 $(z_{12} = x_2 \ominus x_1)$

    $\Rightarrow$ z_{12} は, 初期値から求めた $\hat{z}_{12}(\breve{x}_1, \breve{x}_2) = \breve{x}_2 \ominus \breve{x}_1$ そのもの!



細かな話題 (1)

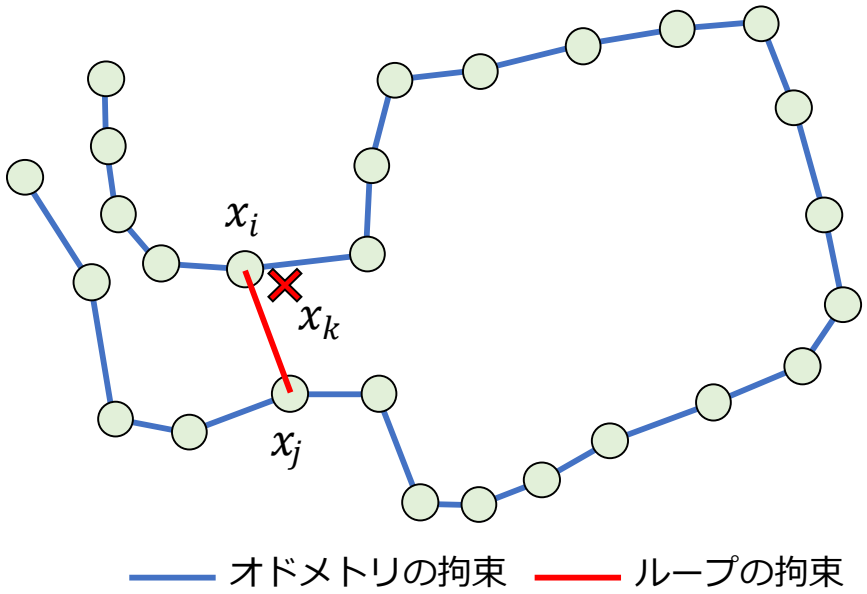
- ループ辺の必要性
  - エッジ (i, j) がオドメトリ辺の場合, 残差 $e_{ij}(\breve{x}_i, \breve{x}_j)$ は 0 である
  - グラフのエッジが全てオドメトリ辺であれば, ベクトル b が 0 になる

$$
\begin{aligned}
b &= \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} b_{ij} \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} \left[\cdots \; e_{ij}(\breve{x}_i, \breve{x}_j)^\top \Omega_{ij} J_i \; \cdots \; e_{ij}(\breve{x}_i, \breve{x}_j)^\top \Omega_{ij} J_j \; \cdots \right]
\end{aligned}
$$

  - 方程式 $H\Delta x = -b$ の右辺が 0 であるから, Δx も 0 となる
    $\Rightarrow$ ノードの姿勢 $x^*_{0:t}$ が, 初期値 $\breve{x}_{0:t}$ のままである
    $\Rightarrow$ ポーズ調整の前後で, 全ノードの姿勢 $x_{0:t}$ が変化しない
  - ポーズグラフにループ辺が 1 つもなければ, ポーズ調整ができない
    $\Leftarrow$ 直感的には明らか

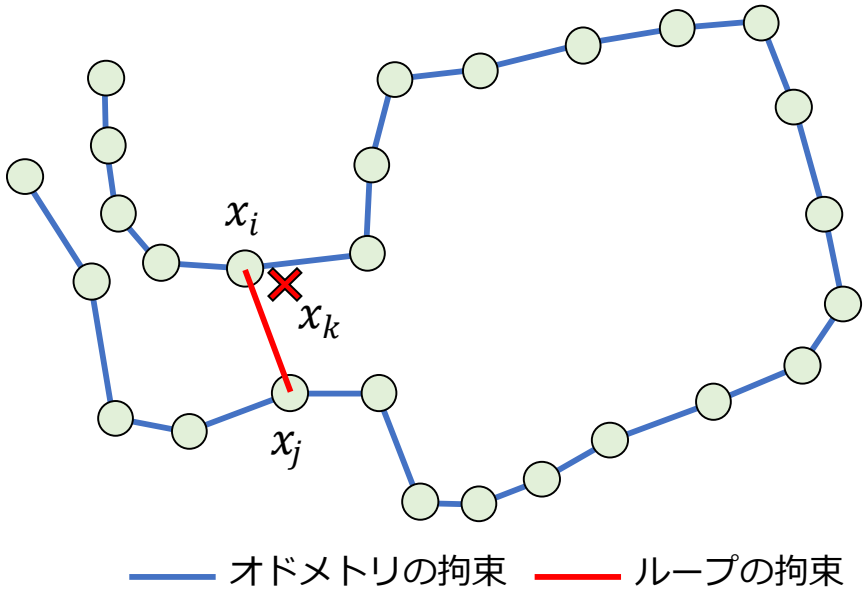
細かな話題 (1)

- ループ辺の必要性
  - エッジ (i, j) がループ辺の場合について考える
  - $\widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ は, 2 つのノード x_i, x_j から計算される相対姿勢
    $\Rightarrow$ x_i と x_j は, 逐次実行により求められる
    $\Rightarrow$ x_i から長い時間を経て x_j に辿り着く
    $\Rightarrow$ x_j は累積誤差の影響を受けて, 実際の位置から外れている



細かな話題 (1)

- ループ辺の必要性
  - $\widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ は, 2 つのノード x_i, x_j から計算される相対姿勢
    $\Rightarrow$ x_j は累積誤差の影響を受けて, 実際の位置から外れている
  - z_{ij} は観測, 従って, ループ検出により得られる相対姿勢
    $\Rightarrow$ z_{ij} は, $\widehat{z}_{ij}$ と比べれば, 比較的正確である



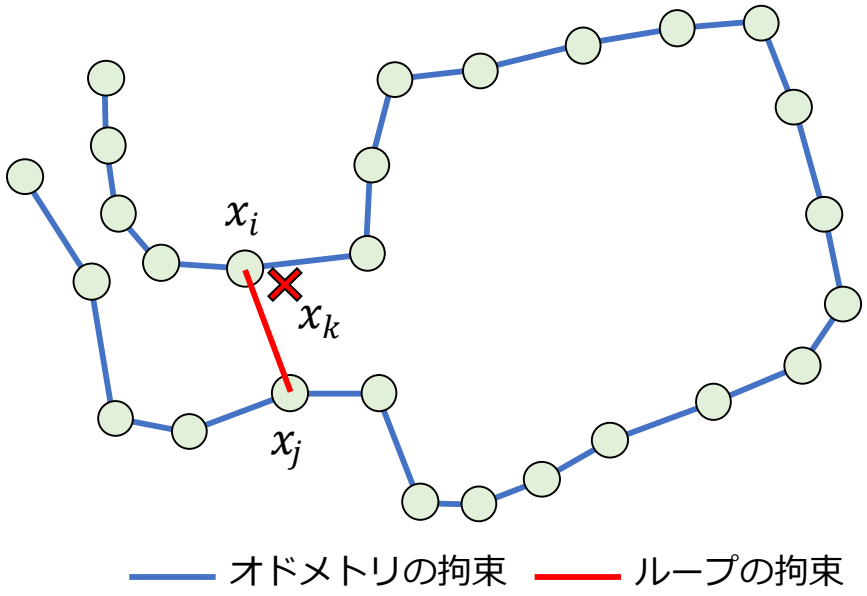
細かな話題 (1)

- ループ辺の必要性
  - 観測 z_{ij} は x_j と x_k の差であり, $\hat{z}_{ij}$ は x_i と x_j の差 (下図)

    $\Rightarrow$ z_{ij} と $\hat{z}_{ij}$ は, 通常大きく異なる

    $\Rightarrow$ ループ辺の場合は, 残差 $e_{ij}(x_i, x_j)$ が 0 にならない

    $\Rightarrow$ $b \neq 0, \Delta x \neq 0$ となって, ポーズ調整が機能する
  - ポーズ調整を行うためには, ループ辺が必要である



目次

細かな話題 (2)

- ポーズ調整ではヤコビ行列を計算する [5, 7]
  - 各エッジ (i, j) について, 2 つのヤコビ行列 J_i, J_j を計算する
    $\Leftarrow$ 初期値 $x_i = \breve{x}_i, x_j = \breve{x}_j$ のもとでの, 残差 $e_{ij}(x_i, x_j)$ の偏微分

$$J_i = \left.\frac{\partial e_{ij}(x_i, x_j)}{\partial x_i}\right|_{x_i=\breve{x}_i, x_j=\breve{x}_j}$$

$$J_j = \left.\frac{\partial e_{ij}(x_i, x_j)}{\partial x_j}\right|_{x_i=\breve{x}_i, x_j=\breve{x}_j}$$

  - $e_{ij}(x_i, x_j) = z_{ij} - \hat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ である
    $\Rightarrow$ z_{ij} は定数項なので, 無視できる
    $\Rightarrow$ $\hat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ の x_i, x_j による偏微分を考えればよい

  - $\hat{z}_{ij}(x_i, x_j) = x_j \ominus x_i$ は, x_i と x_j の相対姿勢を求める関数

細かな話題 (2)

- 相対姿勢を求める関数 [16, 5, 7]
  - $\widehat{z}_{ij}(x_i, x_j) = x_j \ominus x_i$ は, x_i と x_j の相対姿勢を求める関数
  - $x_i = \left[\xi_i^x, \xi_i^y, \xi_i^\theta\right]^\top$, $x_j = \left[\xi_j^x, \xi_j^y, \xi_j^\theta\right]^\top$ とすると,

$$
\begin{aligned}
& \widehat{z}_{ij}(x_i, x_j) \\
= \quad & x_j \ominus x_i \\
= \quad & \begin{bmatrix} \cos\xi_i^\theta & \sin\xi_i^\theta & 0 \\ -\sin\xi_i^\theta & \cos\xi_i^\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_j^x - \xi_i^x \\ \xi_j^y - \xi_i^y \\ \xi_j^\theta - \xi_i^\theta \end{bmatrix} \\
= \quad & \begin{bmatrix} \cos\xi_i^\theta \left(\xi_j^x - \xi_i^x\right) + \sin\xi_i^\theta \left(\xi_j^y - \xi_i^y\right) \\ -\sin\xi_i^\theta \left(\xi_j^x - \xi_i^x\right) + \cos\xi_i^\theta \left(\xi_j^y - \xi_i^y\right) \\ \xi_j^\theta - \xi_i^\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

細かな話題 (2)

- ヤコビ行列の計算
  - ヤコビ行列 J_i は次のようになる [5, 7]

$$
\begin{aligned}
J_i &= \frac{\partial e_{ij}(x_i, x_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(z_{ij} - \widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)\right) \\
&= -\frac{\partial \widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)}{\partial x_i} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\xi_i^\theta & \sin\xi_i^\theta & \sin\xi_i^\theta\left(\xi_j^x - \xi_i^x\right) - \cos\xi_i^\theta\left(\xi_j^y - \xi_i^y\right) \\ -\sin\xi_i^\theta & \cos\xi_i^\theta & \cos\xi_i^\theta\left(\xi_j^x - \xi_i^x\right) + \sin\xi_i^\theta\left(\xi_j^y - \xi_i^y\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R(\xi_i^\theta)^\top & -\dfrac{\partial R(\xi_i^\theta)^\top}{\partial \xi_i^\theta}\left(t_j - t_i\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

細かな話題 (2)

- ヤコビ行列の計算
  - 3×3 のヤコビ行列 J_i は次のようになる [5, 7]

$$
\begin{aligned}
J_i &= \begin{bmatrix} \cos \xi_i^\theta & \sin \xi_i^\theta & \sin \xi_i^\theta \left(\xi_j^x - \xi_i^x\right) - \cos \xi_i^\theta \left(\xi_j^y - \xi_i^y\right) \\ -\sin \xi_i^\theta & \cos \xi_i^\theta & \cos \xi_i^\theta \left(\xi_j^x - \xi_i^x\right) + \sin \xi_i^\theta \left(\xi_j^y - \xi_i^y\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R(\xi_i^\theta)^\top & -\dfrac{\partial R(\xi_i^\theta)^\top}{\partial \xi_i^\theta} \left(t_j - t_i\right) \\ 0^\top & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

  - 但し, $t_i = \left[\xi_i^x, \xi_i^y\right]^\top$, $t_j = \left[\xi_j^x, \xi_j^y\right]^\top$
  - $R(\xi_i^\theta)$ は, ξ_i^θ により定まる, 2×2 の回転行列

$$
R(\xi_i^\theta) = \begin{bmatrix} \cos \xi_i^\theta & -\sin \xi_i^\theta \\ \sin \xi_i^\theta & \cos \xi_i^\theta \end{bmatrix} \tag{60}
$$

細かな話題 (2)

- ヤコビ行列の計算
  - ヤコビ行列 J_j も同様に求められる [5, 7]

$$
\begin{aligned}
J_j &= \frac{\partial e_{ij}(x_i, x_j)}{\partial x_j} \\
&= -\frac{\partial \widehat{z}_{ij}(x_i, x_j)}{\partial x_j} \\
&= \begin{bmatrix} -\cos\xi_i^\theta & -\sin\xi_i^\theta & 0 \\ \sin\xi_i^\theta & -\cos\xi_i^\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -R(\xi_i^\theta)^\top & 0 \\ 0^\top & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{61}
$$

  - これらを使って, ポーズ調整の計算を進める (2 次元の場合)
  - 3 次元の場合の計算は [5] を参照

目次

細かな話題 (3)

- レーベンバーグ・マーカート法の利用 [7, 15, 14]
  - ガウス・ニュートン法によるポーズ調整では, 次の方程式を解いた

$$H\Delta x = -b$$

  - レーベンバーグ・マーカート法を用いる場合は, 次の方程式を解く [7]

$$(H + \lambda I)\,\Delta x = -b \tag{62}$$

  - λI は, H の対角成分を用いて, $\lambda \operatorname{diag} H$ としてもよい
  - $\lambda \geq 0$ は, ガウス・ニュートン法と最急降下法を調節する
    $\Rightarrow \lambda = 0$ のとき, ガウス・ニュートン法に一致
    $\Rightarrow \lambda \to \infty$ のとき, 最急降下法に一致

細かな話題 (3)

- レーベンバーグ・マーカート法の利用 [7, 15, 14]
  - $\lambda \geq 0$ は, ガウス・ニュートン法と最急降下法を調節する
    $\Rightarrow$ $\lambda = 0$ のとき, ガウス・ニュートン法に一致
    $\Rightarrow$ $\lambda \to \infty$ のとき, 最急降下法に一致
  - ガウス・ニュートン法は, 目的関数のヘッセ行列を近似する
    $\Rightarrow$ この近似は, 解の近傍でのみ有効である
  - 解から離れているとき, 勾配法を用いて大まかな探索を行う
    $\Rightarrow$ 解にある程度近づいたら, ガウス・ニュートン法に切り替える
    $\Rightarrow$ レーベンバーグ・マーカート法は, この切り替えを λ で行う

細かな話題 (3)

- レーベンバーグ・マーカート法の利用 [7, 15, 14]
  - レーベンバーグ・マーカート法を用いる場合は, 次の方程式を解く

$$(H + \lambda I)\,\Delta x = -b$$

  - 目的関数 $F(x_{0:t})$ が増加した場合, λ を大きくする $(\lambda \leftarrow 10\lambda)$

    $\Leftrightarrow$ $F(x_{0:t})$ が減少した場合は, λ を小さくする $(\lambda \leftarrow \frac{1}{10}\lambda)$

  - 新たなループ辺が追加されると, $F(x_{0:t})$ が増加する

    $\Rightarrow$ 現在の姿勢 $x_{0:t}$ が, 最適解 $x^*_{0:t}$ から離れている状態

    $\Rightarrow$ λ を大きくして最急降下法に切り替え, 大まかな探索を行う

    $\Rightarrow$ 最適解にある程度近いところまで到達

    $\Rightarrow$ λ を小さくして, ガウス・ニュートン法に切り替える

    $\Rightarrow$ ノードの姿勢 $x_{0:t}$ を正しく修正できる

目次

細かな話題 (4)

- 外れ値への対処 [6]
  - ポーズ調整は，次の目的関数 $F(x_{0:t})$ の最小化

$$
\begin{aligned}
F(x_{0:t}) &= \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} F_{ij}(x_i, x_j) \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} \left(e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(x_i, x_j)\right)
\end{aligned}
$$

  - 誤ったループ検出 (外れ値) は，アルゴリズムに悪影響を与える

    $\Rightarrow$ ループ辺 (i, j) が誤って追加されたとする

    $\Rightarrow$ エッジの残差 $e_{ij}(x_i, x_j)$ が大きくなる

    $\Rightarrow$ 目的関数に，過剰に大きな二乗誤差 $F_{ij}(x_i, x_j)$ が足される

細かな話題 (4)

- 外れ値への対処 [6]
  - ポーズ調整は，次の目的関数 $F(x_{0:t})$ の最小化

$$F(x_{0:t}) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} \left(e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(x_i, x_j)\right)$$

  - 外れ値に敏感ではない関数 $\rho(\cdot)$ を使う

    $\Rightarrow$ $\rho(\cdot)$ は，二乗誤差 $F_{ij}(x_i, x_j)$ よりは敏感でない

    $\Rightarrow$ 外れ値による影響を低減

  - $\rho(\cdot)$ を使って，目的関数を次のように記述

$$F(x_{0:t}) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} \rho\left(e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(x_i, x_j)\right) \tag{63}$$

細かな話題 (4)

- 外れ値への対処 [6]
  - $\rho(\cdot)$ を使って, 目的関数を次のように記述 (ロバスト推定)

$$F(x_{0:t}) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} \rho\left(e_{ij}(x_i, x_j)^\top \Omega_{ij} e_{ij}(x_i, x_j)\right)$$

  - 文献 [6] では, Huber 損失関数を利用

$$\rho(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s^2 & |s| \leq \delta \\ \delta\left(|s| - \frac{1}{2}\delta\right) & \text{Otherwise} \end{cases} \tag{64}$$

  - ヤコビ行列 J や更新量 Δx を適切にスケーリングする

  - 詳しく知らないので, 文献 [6, 13] を参照
  - 外れ値の対処法として, Dynamic Covariance Scaling [1] も参照

目次

まとめ

- このスライドのまとめ
  - SLAM の概要
  - グラフベース SLAM の定式化
  - ポーズグラフの中身と構築方法
  - ポーズ調整のアルゴリズム
  - 細かな話
    - ヤコビ行列の計算例
    - レーベンバーグ・マーカート法
    - ロバスト推定 (M 推定)
- 初心者なので, 間違っている部分があるかもしれません
- ご清聴有難うございました

参考文献

[1] Pratik Agarwal, Gian Diego Tipaldi, Luciano Spinello, Cyrill Stachniss, and Wolfram Burgard.
Robust map optimization using dynamic covariance scaling.
In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 62–69, 2013.

[2] Ola Bengtsson and Albert-Jan Baerveldt.
Localization in changing environments - estimation of a covariance matrix for the idc algorithm.
In *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 1931–1937 vol.4, 2001.

[3] Peter Biber and Wolfgang Straßer.
The Normal Distributions Transform: A New Approach to Laser Scan Matching.
In *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 2743–2748 vol.3, 2003.

[4] Andrea Censi.
An accurate closed-form estimate of icp's covariance.
In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 3167–3172, 2007.

参考文献

[5] Giorgio Grisetti, Rainer Kümmerle, Cyrill Stachniss, and Wolfram Burgard.
A Tutorial on Graph-Based SLAM.
IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems Magazine, 2(4):31–43, December 2010.

[6] Wolfgang Hess, Damon Kohler, Holger Rapp, and Daniel Andor.
Real-Time Loop Closure in 2D LIDAR SLAM.
In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1271–1278, 2016.

[7] Kurt Konolige, Giorgio Grisetti, Rainer Kümmerle, Wolfram Burgard, Benson Limketkai, and Regis Vincent.
Efficient Sparse Pose Adjustment for 2D mapping.
In *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 22–29, 2010.

[8] Rainer Kümmerle, Giorgio Grisetti, Hauke Strasdat, Kurt Konolige, and Wolfram Burgard.
g2o: A General Framework for Graph Optimization.
In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 3607–3613, 2011.

参考文献

[9] Luis Montesano, Javier Minguez, and Luis Montano.
Probabilistic scan matching for motion estimation in unstructured environments.
In *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 3499–3504, 2005.

[10] Edwin B. Olson.
Real-Time Correlative Scan Matching.
In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 4387–4393, 2009.

[11] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery.
Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing.
Cambridge University Press, 2007.

[12] Sebastian Thrun, Wolfram Burgard, and Dieter Fox.
Probabilistic Robotics.
MIT Press, 2005.

[13] Bill Triggs, Philip Mclauchlan, Richard Hartley, and Andrew Fitzgibbon.
Bundle Adjustment - A Modern Synthesis.
In *Proceedings of the International Workshop on Vision Algorithms: Theory and Practice*, pages 298–372, September 1999.

参考文献

[14] 金森 敬文, 鈴木 大慈, 竹内 一郎, and 佐藤 一誠.
機械学習プロフェッショナルシリーズ機械学習のための連続最適化.
講談社, 2016.

[15] 金谷 健一.
これなら分かる最適化数学 –基礎原理から計算手法まで–.
共立出版, 2005.

[16] 友納 正裕.
SLAM 入門 –ロボットの自己位置推定と地図構築の技術–.
オーム社, 2018.

[17] 上田 隆一.
詳解 確率ロボティクス *Python* による基礎アルゴリズムの実装.
講談社, 2019.